Done

OSMANIA UNIVERSITY

مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

سلسلۂ مطبوعات نصابِ علوم جامعۂ عثمانیہ

مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

تصنیف

ڈبلیو۔ یس۔ برنسائڈ۔ ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

و

اے۔ ڈبلیو۔ پیانٹن۔ ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن دار الترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۵۵ھ م سنہ ۱۳۴۵ف سنہ ۱۹۳۶ء

از مطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

٧٨٦
٩٢

فہرست مضامین

مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

تیرہواں باب

مقطعات

دفعہ	مضمون	صفحہ
۱۲۷ —	تعریفات۔	۱
۱۲۸ —	علامتوں سے متعلق قاعدہ۔	۵
۱۲۹ تا ۱۳۲ —	مقطعات کے ابتدائی مسئلے، مسائل ۱ تا ۴۔	۱۱
۱۳۳ —	صغیر مقطعات، تعریفات۔	۱۷
۱۳۴ —	مقطعات کا پھیلاؤ۔	۱۸
۱۳۵ —	مقطع کو پھیلانے کا لاپلاس کا طریقہ۔	۲۵
۱۳۶ —	مقطع کا پھیلاؤ صدر عناصر کے حاصل ضربوں میں۔	۲۹
۱۳۷ —	مقطع کا پھیلاؤ ایک صف اور ایک ستون کے عناصر کے زوجوں کے	

دفعہ	مضمون	صفحہ
	حاصل ضربوں میں —	۳۲
۱۳۸ —	مقطعات کی جمع، مسئلہ ۵ —	۳۴
۱۳۹، ۱۴۰ —	مزید مسیلے، مسئلہ ۶ اور مسئلہ ۷ —	۳۶
۱۴۱ —	مقطعات کی ضرب، مسئلہ ۸ —	۴۴
۱۴۲ —	مسئلہ ۸ کا دوسرا ثبوت —	۴۶
۱۴۳ —	مستطیلی آراستے —	۵۲
۱۴۴ —	خطی مساواتوں کے نظام کا حل —	۵۸
۱۴۵ —	خطی متجانس مساواتیں —	۶۲
۱۴۶ —	تکافی مقطعات —	۶۴
۱۴۷ —	متشاکل مقطعات —	۶۷
۱۴۸ —	معوج متشاکل اور معوج مقطعات —	۷۱
۱۴۹ —	وہ مسئلہ جو اُس مقطع سے متعلق ہے جس کا صدر پہلا صغیر معدوم ہوتا ہے —	۷۷
	متفرق مثالیں —	۸۰

چودہواں باب

اسقاط

دفعہ	مضمون	صفحہ
۱۵۰ —	تعریفات —	۱۱۲
۱۵۱ —	متشاکل تفاعلوں کی مدد سے اسقاط —	۱۱۴
۱۵۲ —	حاصل اسقاط کی خاصیتیں —	۱۱۵
۱۵۳ —	یولر کا اسقاط کا طریقہ —	۱۱۸
۱۵۴ —	سلوسٹر کا اسقاط کا طریقہ —	۱۲۰

دفعہ	مضمون	صفحہ
۱۵۵ —	بیزوکا اسقاط کا طریقہ ۔	۱۲۲
۱۵۶ —	اسقاط کے دوسرے طریقے ۔	۱۲۹
۱۵۷ —	ممیز ۔	۱۳۲
۱۵۸ —	دو مساواتوں کی مشترک اصل کی تعئین ۔	۱۳۶
	امثلہ ۔	۱۳۹

پندرھواں باب

متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنا نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر

دفعہ	مضمون	صفحہ
۱۵۹ —	سام اور ب م کے لیے ویرنگ کے عام جملے ۔	۱۴۵
۱۶۰ —	دو مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعل ۔	۱۴۷
۱۶۱ —	اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں سے محسوب کرنا ۔	۱۴۸
۱۶۲ —	کعبی کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل ۔	۱۵۲
۱۶۳ —	چار درجی کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل ۔	۱۵۵
۱۶۴ —	نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر ۔	۱۵۷
۱۶۵ —	نیم غیر متغیروں کی تعئین ۔	۱۶۱
	مثالیں ۔	۱۶۸

سولھواں باب

ہم متغیر اور غیر متغیر

دفعہ	مضمون	صفحہ
۱۶۶ —	تعریفات ۔	۱۶۹

صفحہ	مضمون	دفعہ
۱۸۰	ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت ۔	۱۶۷ ۔
۱۸۳	ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے خواص ۔	۱۶۸ ۔
۱۸۷	عامل عف کے ذریعہ ہم متغیروں کی ساخت ۔	۱۶۹ ۔
۱۹۰	ہم متغیروں اور نیم ہم متغیروں سے متعلق مسئلہ ۔	۱۷۰ ۔
۱۹۱	دوہرے خطی استحالہ کا استعمال ہم متغیروں کے نظریہ پر ۔	۱۷۱ ۔
۱۹۶	خطی استحالہ سے اخذ شدہ ہم متغیروں کے خواص ۔	۱۷۲ ۔
۲۰۱	وہ مسئلے جو کثیر رقمیوں کے نیم متغیروں اور ہم متغیروں سے متعلق ہیں ۔	۱۷۳ تا ۱۷۶ ۔
۲۱۰	تفرقی علامتوں کے ذریعہ غیر متغیروں اور ہم ہم متغیروں کو اخذ کرنا ۔	۱۷۷ ۔
۲۱۳	آرنہولڈ اور کلبش کی ترقیم ۔	۱۷۸ ۔
۲۱۵	مثالیں ۔	

سترہواں باب

دو درجی ، تین درجی اور چار درجی کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۲۲۴	دو درجی ۔	۱۷۹ ۔
۲۲۵	تین درجی اور اس کے ہم متغیر ۔	۱۸۰ ۔
۲۳۰	کعبی کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی تعداد ۔	۱۸۱ ۔
۲۳۱	چار درجی ، اس کے ہم متغیر اور غیر متغیر ۔	۱۸۲ ۔
۲۳۳	چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی ۔	۱۸۳ ۔

صفحہ	مضمون	دفعہ
۲۳۵	چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں علیسوی کو بیان کرنا ۔	۱۸۴ ۔
۲۳۶	خود چاردری کو چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں بیان کرنا ۔	۱۸۵ ۔
۲۳۸	چار درجی کی تحلیل ۔	۱۸۶ ۔
۲۴۲	ک ۶ ۔ لہ ھ لا کے غیر متغیر اور ہم متغیر ۔	۱۸۷ ۔
۲۴۵	چار درجی کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد ۔	۱۸۸ ۔
۲۴۷	مثالیں ۔	

اٹھارواں باب

مجتمع شکلوں کے ہم متغیر اور غیر متغیر

صفحہ	مضمون	دفعہ
۲۵۴	مجتمع شکلیں ۔	۱۸۹ ۔
۲۵۵	دو دو درجی ۔	۱۹۰ ۔
۲۵۷	دو درجی اور کعبی ۔	۱۹۱ ۔
۲۵۹	دو کعبی ۔	۱۹۲ ۔
۲۶۲	اجتماعئے ۔	۱۹۳ ۔
۲۶۳	مثالیں	

دفعہ	مضمون	صفحہ

انیسواں باب
استحالات
فصل (۱)۔ چرن ہاؤزن کا استحالہ

۱۹۴۔	مسئلہ۔	۲۷۵
۱۹۵۔	استحالہ شدہ مساوات کی ساخت۔	۲۷۹
۱۹۶۔	استحالہ شدہ مساوات کو بنانیکا دوسرا طریقہ۔	۲۸۰
۱۹۷۔	کعبی پر چرن ہاوزن کے استحالہ کا استعمال۔	۲۸۱
۱۹۸۔	چار درجی پر چرن ہاؤزن کے استحالہ کا استعمال۔	۲۸۳
۱۹۹۔	چرن ہاوزن کے استحالہ سے کعبی کو ثنائی شکل میں تحویل کرنا۔	۲۸۵
۲۰۰۔	چرن ہاوزن کے استحالہ سے چار درجی کو سہ رقمی شکل میں تحویل کرنا۔	۲۸۶
۲۰۱۔	ن ویں درجہ کی مساوات سے دوسری، تیسری، چوتھی رقموں کا جدا کرنا۔	۲۸۷

فصل (۲)۔ ہرمٹ اور سلوسٹر کے مسئلے

۲۰۲۔	دوسرے درجہ کے متجانس تفاعل کو مربعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کرنا۔	۲۹۱
۲۰۳۔	ہرمٹ کا مسئلہ۔	۲۹۵
۲۰۴۔	وہ مسئلہ جو اسٹرم کے باقیوں سے متعلق ہے۔	۳۰۱

صفحہ	مضمون	دفعہ
۳۰۷	اسٹرم کے تفاعلوں کے لیے سلوسٹر کی شکلیں ۔	۲۰۵ ۔

فصل (۳)۔ متفرق مسائل

صفحہ	مضمون	دفعہ
۳۱۱	پانچ درجی کو تین، پانچویں قوتوں کے مجموعہ میں تحویل کرنا۔	۲۰۶ ۔
۳۱۵	چار درجی اور کعبی جو ایک دوسرے میں مستحیل ہو سکتے ہیں ۔	۲۰۷ ۔
۳۱۹	کسی کثیر رقمی کے مطلق غیر متغیروں کی تعداد ۔	۲۰۸ ۔
۳۲۱	کثیر درجی کے نیم متغیروں کی تعداد ۔	۲۰۹ ۔
۳۲۳	ہرمٹ کا قانون متکافیت	۲۱۰ ۔
۳۲۶	متکافی اور قائم خطی استحالہ ۔ ضد متغیر ۔	۲۱۱ ۔
۳۳۴	متفرق مثالیں ۔	

فصل (۴)۔ ہندسی استحالات

صفحہ	مضمون	دفعہ
۳۵۴	ثنائی شکلوں کا ثلاثی شکلوں میں استحالہ ۔	۲۱۲ ۔
۳۵۷	دو درجی اور دو درجیوں کے نظام ۔	۲۱۳ ۔
۳۵۹	چار درجی اور اس کے ہم متغیروں پر ہندسی طریقہ سے بحث ۔	۲۱۴ ۔
۳۶۲	ثلاثی نظام میں تمام استحالات ۔	۲۱۵ ۔
۳۶۸	یگانہ ثلاثی شکل کی تعئین ۔	۲۱۶ ۔
۳۷۵	چار درجی اور دو درجی کا مخلوط نظام ۔	۲۱۷ ۔
۳۸۰	چھ درجی کے صدر ہم رو ۔	۲۱۸ ۔

دفعہ	مضمون	صفحہ
۲۱۹ —	جیکوبی کی ہندسی تعبیر۔	۳۸۴
	مثالیں۔	۳۸۵

بیسواں باب

ابدالات اور گروہوں کا نظریہ

فصل اول۔ ابدالات بالعموم

۲۲۰ —	تعریفات۔ ترقیم۔	۳۹۸
۲۲۱ —	دائری ابدالات۔	۳۹۹
۲۲۲ —	ابدالوں کے حاصل ضرب اور قوتیں۔	۴۰۲
۲۲۳ —	متشابہ ابدالات۔	۴۱۰

فصل دوم۔ کثیر قیمتی تفاعل اور گروہ

۲۲۴ —	گروہ کی تعریف۔ متشاکل گروہ	۴۱۲
۲۲۵ —	متبادلہ گروہ۔	۴۱۴
۲۲۶ —	کثیر قیمتی تفاعلوں کی مزدوج قیمتیں اور مزدوج گروہ۔	۴۱۶
	مثالیں۔	۴۲۳
۲۲۷ —	دئے ہوئے گروہ کے تفاعلوں کو بنانا۔ گیلوا تفاعل	۴۲۹
۲۲۸ —	مسئلہ۔	۴۳۳
۲۲۹ —	مسئلہ جو ایک ہی گروہ کے دو تفاعلوں کو مربوط کرتا ہے۔	۴۳۵
۲۳۰ —	مسئلہ کی توسیع اور نتائج صریح۔	۴۳۷

دفعہ	مضمون	صفحہ
۲۳۱ —	دو قیمتی تفاعل ـ مسئلہ ـ	۴۴۱
۲۳۲ —	مسئلہ جو متبادل تفاعل سے متعلق ہے ـ	۴۴۳
۲۳۳ —	مسئلہ جو کثیر قیمتی تفاعلوں کی قوتوں سے متعلق ہے ـ	۴۴۴

فصل سوم ـ گیالوا کا محلل

دفعہ	مضمون	صفحہ
۲۳۴ —	گیالوا کا محلل ـ مساوات کا گروہ ـ	۴۴۸
	مثالیں ـ	۴۵۵

فصل چہارم ـ مساواتوں کا جبری حل

دفعہ	مضمون	صفحہ
۲۳۵ —	مساواتوں کے جبری حل پر نظریہ ابدالات کا اطلاق ـ	۴۶۵
۲۳۶ —	منطق احاطہ کی تعریف ـ	۴۶۸
۲۳۷ —	جبری طور پر حل پذیر مساواتوں کی اصلوں کی شکل ـ	۴۶۹
۲۳۸ —	آبل کا مسئلہ ـ	۴۷۳
۲۳۹ —	اصلوں کی شکل (مسلسل) ـ	۴۷۴
۲۴۰ —	جبری مساواتوں پر اطلاق ـ	۴۷۸
	بنیادی مسئلہ ـ	۴۸۴
	مساواتیں جن کی قوت چار سے اعلیٰ ہو ناقابل حل ہوتی ہیں ـ	۴۸۵

فصل پنجم ـ آبل کی مساواتیں

دفعہ	مضمون	صفحہ
۲۴۱ —	آبل کی مساواتوں کی تعریف ـ گیالوا کا محلل آبل کی ایک مساوات ہے ـ	۴۸۷
۲۴۲ —	آبل کی عام مساوات کا حل ـ	۴۸۹

دفعہ	مضمون	صفحہ
۲۴۳ ۔	ایک خاص آبل کی مساوات کا حل ۔	۴۹۱
۲۴۴ ۔	آبل کی مساوات کو حل کرنے کا دوسرا طریقہ جبکہ مساوات کی تمام اصلوں سے ایک گروہ بنے ۔	۴۹۴
۲۴۵ ۔	مفرد قوت والی ثنائی مساوات کا حل ۔	۴۹۷
۲۴۶ ۔	اگر نا تحویل پذیر مساوات کی ایک اصل دوسری اصل کا منطق تفاعل ہو تو دی ہوئی مساوات آبل کی مساوات ہوگی ۔	۵۰۴
	نوٹ (ا) ۔	۵۱۱
	نوٹ (ب) ۔	۵۱۳
	نوٹ (ج) ۔	۵۱۵
	نوٹ (د) ۔	۵۱۸
	نوٹ (ع)	۵۲۱
	اشاریہ ۔	۵۲۳

مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

(1)

تیرہواں باب

مقطعات

۱۲۷ - **تعریفات** - اس باب میں تفاعلوں کی ایک اہم جماعت پر بحث کیجائیگی جو اکثر تحلیل میں پیش آیا کرتے ہیں۔ یہ تفاعل اہم خواص رکھتے ہیں جن کے علم سے نظری اور عملی ریاضیات دونوں کے بہت سے حسابوں میں بڑی آسانی پیدا کیجا سکتی ہے۔

چار مقداروں

$ا_۱ ، ب_۱$

$ا_۲ ، ب_۲$

کا تفاعل $ا_۱ ب_۲ + ا_۲ ب_۱$ اس طور پہ حاصل ہوتا ہے:- ا اور ب کو حرفی ترتیب میں لکھ کر اعداد ۱ اور ۲ کی دو ترتیبوں کے جواب میں ان حرفوں کو لاحقے ۱، ۲ اور ۲، ۱ لگادو اور اس طور پر بنے ہوئے دونوں حاصل ضربوں کو جمع کر دو۔

اسی طرح نو مقداروں

ا$_۱$، ب$_۱$، ج$_۱$
ا$_۲$، ب$_۲$، ج$_۲$
ا$_۳$، ب$_۳$، ج$_۳$

کا تفاعل ا$_۱$ب$_۲$ج$_۳$ + ا$_۱$ب$_۳$ج$_۲$ + ا$_۲$ب$_۳$ج$_۱$ + ا$_۲$ب$_۱$ج$_۳$
+ ا$_۳$ب$_۱$ج$_۲$ + ا$_۳$ب$_۲$ج$_۱$ .... (۱)

اس طور پر حاصل ہوتا ہے:- ا، ب، ج کو حرفی ترتیب ا ب ج میں لکھکر اعداد ۱، ۲، ۳ کی تمام ترتیبوں کے جواب میں ان حرفوں کے نیچے (انہیں اسی حرفی ترتیب میں رکھکر) لاحقے لگاؤ اور اس طور پر بنے ہو سب حاصل ضربوں کو جمع کرو۔ اس پورے جملہ کو (ا ب ج) سے تعبیر کیا جاسکتا ہے یا کوئی اور دوسری ترقیم استعمال کیجا سکتی ہے جس سے تمام رقمیں آسانی کے ساتھ لکھی جاسکیں۔

ترقیم (ا ب ج د) کو ایک ایسے ہی تفاعل کے تعبیر کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے جو ۱۶ مقداروں ا$_۱$، ب$_۱$، ج$_۱$، د$_۱$، ا$_۲$، ب$_۲$ وغیرہ کی ۲۴ رقموں سے بنتا ہے اور ان تمام رقموں کو آسانی کے ساتھ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ کی ۲۴ ترتیبوں کی مدد سے لکھہ لیا جاسکتا ہے۔

عام صورت میں اگر ن حروف ا، ب، ج، .....ل لئے جائیں تو ہم اسی نمونہ کا تفاعل لکھہ سکتے ہیں جسمیں ن (ن-۱)(ن-۲) ..... × ۳ × ۲ × ۱ رقمیں شامل ہونگی یہ تعداد وہی ہے جو ۱، ۲، ۳، ...ن کو آپس میں ترتیب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

اب وہ تفاعل جنکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے یعنی جو ریاضیاتی تحلیل میں اسقدر کثرت سے واقع ہوتے ہیں متذکرہ بالا تفاعلوں سے صرف ایک بات میں مختلف ہیں یعنے ۱ × ۲ × ۳ × ... × ن (جو ایک جفت تعداد ہے) رقموں میں سے سب کی سب مثبت ہونیکی بجائے

(جیسا کہ اوپر کے تفاعلوں میں ہے) رقموں کی نصف تعداد مثبت علامت سے اور نصف تعداد منفی علامت سے متاثر ہوتی ہے۔

اب ہم ایسے تفاعلوں کی چند مثالیں دیتے ہیں جو اس باب میں زیر بحث رہینگے۔ یہ تفاعل اکثر خطی مساواتوں کا حاصل اسقاط معلوم کرنے میں نتیجہ کے طور پر حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً مساواتوں

$$ا_{1} لا + ب_{1} ما = 0 ، \quad ا_{2} لا + ب_{2} ما = 0$$

سے لا اور ما کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ ہوگا

$$ا_{1} ب_{2} - ا_{2} ب_{1} = 0$$

نیز مساواتوں

$$ا_{1} لا + ب_{1} ما + ج_{1} ی = 0$$
$$ا_{2} لا + ب_{2} ما + ج_{2} ی = 0$$
$$ا_{3} لا + ب_{3} ما + ج_{3} ی = 0$$

سے لا، ما، ی کو ساقط کرنیکا نتیجہ ہوگا

$$ا_{1} ب_{2} ج_{3} - ا_{1} ب_{3} ج_{2} + ا_{2} ب_{3} ج_{1} - ا_{2} ب_{1} ج_{3} + ا_{3} ب_{1} ج_{2}$$
$$- ا_{3} ب_{2} ج_{1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

چنانچہ اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ اِن میں سے دو مساواتوں کو حل کرکے تیسری مساوات میں درج کرنے سے ہو سکتی ہے۔ یہ تفاعل، تفاعل (۱) سے صرف اسقدر فرق رکھتا ہے کہ اس کی سب رقمیں مثبت ہونے کی بجائے تین رقمیں منفی ہیں۔

(8) اسی طرح چار خطی مساواتوں کی صورت میں عمل اسقاط سے ایک تفاعل سولہ مقداروں $ا_{1}$، $ب_{1}$، $ج_{1}$، $د_{1}$، $ا_{2}$، $ب_{2}$، وغیرہ کا حاصل ہوتا ہے جو (ا ب ج د) سے تعبیر شدہ تفاعل سے صرف اسقدر فرق رکھتا ہے کہ اسکی بارہ رقمیں منفی ہیں۔

اس قسم کے جملے جو یہاں بیان کئے گئے مقطعات[1] کہلاتے ہیں۔

[1] دیکھو اس جلد کے آخر میں دیا ہوا نوٹ [1]

وہ ترقیم جو عام طور پر اِن کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال کیجاتی ہے سب سے پہلے "کوشی" نے جاری کی۔ اِن جملوں کو اس طور پر تعبیر کرنے میں بہت سے فائدے ہیں۔ تفاعل میں شامل ہونے والی مقداروں کو دو انتصابی خطوں کے درمیان مربع کی صورت میں ترتیب دیا جاتا ہے مثلاً ترقیم

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

سے مقطع $ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1$ تعبیر ہوتا ہے۔

اسی طرح مساوات (۲) کی سیدھی طرف کا جملہ ترقیم ذیل سے تعبیر ہوتا ہے:-

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

اور عام صورت میں $ن^2$ مقداروں $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$، .....، $ل_1$، $ا_2$، $ب_2$، وغیرہ کا مقطع ترقیم

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 & \cdots & ل_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 & \cdots & ل_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 & \cdots & ل_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ا_ن & ب_ن & ج_ن & \cdots & ل_ن \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots \quad (۳)$$

سے تعبیر ہوگا۔

اِن ن حرفوں کو حرفی ترتیب میں لکھ کر اور اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ن کی ن(ن-۱)(ن-۲)....۳×۲×۱ ترتیبوں کے جواب میں

لاحقے لگا کر مقطع کی سب رقمیں لکھی جا سکتی ہیں۔ پھر نصف رقموں کو مثبت اور نصف رقموں کو منفی علامت دینی چاہئیے۔ اگلے دفعہ میں وہ قاعدہ دیا جائیگا جس کی رو سے مثبت اور منفی رقموں میں تمیز ہو سکیگی۔ (4)

ہم جداگانہ حروف ا، ب، ج، ...... ا ...... کو جن سے مقطع ترکیب پاتا ہے **اجزائے ترکیبی یا عناصر** کہینگے۔ اجزائے ترکیبی کا کوئی افقاً ترتیب دیا ہوا سلسلہ مثلاً ا، ب، ج ...... ل مقطع کی **صف** اور کوئی انتصاباً ترتیب دیا ہوا سلسلہ مثلاً ا، ا، ا ...... ا مقطع کا **ستون** کہلاتا ہے۔ اصطلاح خط بعض اوقات صف یا ستون کو بلا امتیاز ظاہر کرنیکے لئے استعمال کیجائے گی۔

۱۲۸۔ علامتوں سے متعلق قاعدہ۔ دفعہ ماسبق سے یہ ظاہر ہے کہ مقطع کی ہر رقم میں ہر صف سے ایک (اور صرف ایک) جزو ترکیبی شامل ہوگا کیونکہ اس میں تمام حروف شامل ہوتے ہیں۔ نیز اس میں ہر ستون سے ایک (اور صرف ایک) جزو ترکیبی شامل ہوگا کیونکہ ہر رقم کے لاحقے تمام اعداد پر مشتمل ہوتے ہیں۔ اس لئے ہم دفعہ ۱۲ کی مربع جدول (۳) کو ایسے تفاعل کی ترکیبی تعبیر سمجھ سکتے ہیں جو عموماً ن (ن-۱) (ن-۲) ......۳×۲×۱ رقموں پر مشتمل ہوتی ہے اور جس میں وہ تمام مثبت حاصل ضرب داخل ہوتے ہیں جو ہر صف سے ایک اور صرف ایک جزو ترکیبی اور ہر ستون سے ایک اور صرف ایک جزو ترکیبی سے بن سکتے ہیں۔ اب تفاعل کو مکمل صورت میں پیش کرنیکے لئے صرف یہ معلوم کرنا

باقی ہے کہ کسی مخصوص رقم کو کونسی علامت لگائی جائے۔ اس مقصد کے لئے ذیل کے دو قاعدوں کی پابندی کرنی پڑیگی:۔

(۱) رقم ا₁ ب₂ ج₃ ... لₙ جو اُس وتر کے اجزائے ترکیبی سے بنتی ہے جو سیدھے طرف کے اوپر کے کونے سے بائیں طرف کے نچلے کونے تک کھینچا گیا ہے مثبت ہے۔

اس رقم کو ہم صدر یا فائق رقم کہینگے۔ اس میں لاحقے اور حروف دونوں اپنی قدرتی ترتیب میں واقع ہوتے ہیں اور اس سے کسی دوسری رقم کی علامت قاعدۂ ذیل سے حاصل ہوتی ہے:۔

(۲) کسی دوسری رقم کی علامت مثبت یا منفی ہوگی بموجب اسکے کہ اس رقم میں صدر رقم کے لاحقوں کی ترتیب کے ساتھ مقابلہ کرنے پر اسکے لاحقوں میں ترتیب کے انقلابات کی تعداد جفت یا طاق ہو۔

یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ حروف اپنی قدرتی ترتیب میں واقع ہوتے ہیں اور انقلاب کا واقع ہونا اسوقت کہا جاتا ہے جب کبھی لاحقوں کے درمیان کوئی اعلیٰ تر عدد اپنے نچلے عدد سے پہلے واقع ہو۔ مثلاً رقم ا₃ ب₄ ج₁ د₂ میں چار انقلابات ہیں کیونکہ عدد ۳ ا سے پہلے اور ۲ سے پہلے واقع ہوتا ہے اور عدد ۴ ا سے پہلے اور ۲ سے پہلے۔ اسی طرح ا₁ ب₂ ج₅ د₄ ھ₆ ع₃ میں چھ انقلابات شامل ہیں جنہیں طالب علم آسانی کے ساتھ دیکھ سکتا ہے۔ اس قاعدے کی حسب ذیل ترمیم فائدہ مند ثابت ہوگی:۔

متصلہ لاحقوں کا ایک انتقال (یا باہمی تبادلہ) رقم کی علامت کو بدل دیتا ہے

کیونکہ یہ دیکھنا آسان ہے کہ اس قسم کا کوئی انتقال ایک انقلاب کی زیادتی یا کمی کے مساوی ہے۔ اس عمل سے سلسلہ کے کسی دیگر انقلاب میں کوئی فرق پیدا نہیں ہوتا سوائے ایسے انقلاب کے جو دو زیر بحث متصلہ لاحقوں کے اضافی مقامات پر منحصر ہو جبکہ ان کا ایک دوسرے کے ساتھ مقابلہ کیا جائے۔ اگر عمل انتقال سے قبل یہ لاحقے اپنی قدرتی ترتیب میں ہوں تو ایک انقلاب کا اضافہ ہوتا ہے اور اگر یہ اپنی قدرتی ترتیب میں نہ ہوں تو ایک انقلاب کم ہو جاتا ہے۔ مثلاً ۵ ۳ ۴ ۲ ۷ ۱ ۶ کی ترتیب میں ۲ اور ۷ کو آپس میں بدل دینے سے ایک انقلاب کا اضافہ ہوتا ہے چنانچہ انقلابات کی تعداد گیارہ سے بڑھ کر بارہ ہو جاتی ہے۔ اس لئے مقطع میں اس کے متناظر رقم کی علامت − سے + میں بدلجاتی ہے۔

اب دفعہ ۱۲۷ میں جو یہ بیان کیا گیا ہے کہ مقطع میں مثبت اور منفی رقموں کی تعداد مساوی ہوتی ہے درست ہے۔ کیونکہ کسی ایک رقم سے دوسری ایسی رقم اخذ ہو سکتی ہے جو پہلی سے صرف اسقدر فرق رکھے کہ آخری دو لاحقے آپس میں بدلے ہوئے ہوں اور یہی وہ دو ارقام ہیں جن میں پہلے (ن-۲) لاحقوں کی ترتیب ایک ہی ہے۔ اس لئے تمام رقموں کو ایسے جوڑوں میں ترتیب دیا جا سکتا ہے کہ اگر پہلی مثبت ہو تو دوسری منفی اور اس کے برعکس۔

مثالیں

۱۔ رقم $ا_۱ ب_۲ ج_۳ د_۵ ع_۴$ کی علامت ۵ ویں رتبہ کے مقطع میں دریافت کرو۔

سوال یہ ہے کہ ۱۵۲۴۳ میں ترتیب کے لحاظ سے کتنے انقلابات واقع ہوتے ہیں یا کتنی تبدیلیوں سے ۱۲۳۴۵ کو ۱۵۲۴۳ میں بدلا جا سکتا ہے

یہاں جب ۳ کو ۲ سے اور پھر ۱ سے بدلا جائے تو وہ پہلے مقام پر آجاتا ہے اور ترتیب ہو جاتی ہے ۳ ۱ ۲ ۴ ۵ - پھر ۳ ۱ ۲ ۴ ۵ میں ۴ کو ۲ سے اور پھر ۱ سے بدلا جائے تو ترتیب ۳ ۴ ۱ ۲ ۵ حاصل ہوتی ہے - ۲ کو ۱ سے بدلنے سے ترتیب ۳ ۴ ۲ ۱ ۵ ملتی ہے اور بالآخر ۵ کو ۱ سے بدلنے سے مطلوبہ ترتیب ۳ ۴ ۲ ۵ ۱ حاصل ہو جاتی ہے - پس کل چھ تبدیلیاں کرنی پڑیں اور اس لئے مطلوبہ علامت مثبت ہے -

عام طور پر ذیل کا طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے :- مطلوبہ ترتیب (6)
میں جو عدد پہلے واقع ہوتا ہے اسکو لو اور قدرتی ترتیب ۱ ۲ ۳ ۴ .... میں اسکو اپنی جگہ سے پہلے مقام تک حرکت دو اور اس طور پر اسکو لانے میں ہر عدد پر سے گذرتے وقت ایک نقل مقام شمار کرتے جاؤ - پھر مطلوبہ ترتیب کا دوسرا عدد لو اور قدرتی ترتیب میں اسکو اپنی جگہ سے دوسرے مقام تک حرکت دو اور علیٰ ہذا القیاس - اگر اس عمل میں مقام کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو علامت مثبت ہے اور اگر طاق ہو تو علامت منفی ہے -

۲ — ۷ ویں رتبہ کے مقطع میں رقم ا$_{۳}$ ب$_{۷}$ ج$_{۶}$ د$_{۵}$ ع$_{۱}$ ف$_{۴}$ گ$_{۲}$ کی علامت کیا ہے -

یہاں دو تبدیلیوں سے ۳ پہلے مقام پر آتا ہے - پانچ تبدیلیوں سے ۷ دوسرے مقام پر آتا ہے - پھر چار تبدیلیوں سے ۶ تیسرے مقام پر، پھر تین سے ۵ چوتھے مقام پر، عدد ۱ اپنے مقام پر ہے اور بالآخر ایک تبدیلی ۴ کو چھٹے مقام پر لاتی ہے - اس لئے کل جملہ پندرہ تبدیلیاں ہیں اور مطلوبہ علامت منفی ہے -

۳ — مقطع

ا$_{۱}$	ب$_{۱}$	ج$_{۱}$	د$_{۱}$
ا$_{۲}$	ب$_{۲}$	ج$_{۲}$	د$_{۲}$
ا$_{۳}$	ب$_{۳}$	ج$_{۳}$	د$_{۳}$
ا$_{۴}$	ب$_{۴}$	ج$_{۴}$	د$_{۴}$

کی سب رقمیں لکھو۔

لاحقوں کی وہ چھ ترتیبیں جنمیں ۱ پہلے مقام پر آتا ہے یہ ہیں

۱۲۳۴، ۱۲۴۳، ۱۳۲۴، ۱۳۴۲، ۱۴۲۳، ۱۴۳۲

اِن کے جواب میں چھ ارقام گذشتہ مثالوں کے مطابق یہ ہیں

ا$_{1}$ب$_{2}$ج$_{3}$د$_{4}$ − ا$_{1}$ب$_{2}$ج$_{4}$د$_{3}$ + ا$_{1}$ب$_{3}$ج$_{2}$د$_{4}$ − ا$_{1}$ب$_{3}$ج$_{4}$د$_{2}$

+ ا$_{1}$ب$_{4}$ج$_{2}$د$_{3}$ − ا$_{1}$ب$_{4}$ج$_{3}$د$_{2}$

جنکو طالب علم آسانی کے ساتھ قانون (۲) استعمال کرکے دیکھ سکتا ہے

باقی اٹھارہ ارقام جو اُن ترتیبوں کے جواب میں ہیں جنمیں ۲، ۳، ۴ علی الترتیب پہلا مقام اختیار کرتے ہیں یہ ہیں

ا$_{2}$ب$_{1}$ج$_{3}$د$_{4}$ − ا$_{2}$ب$_{1}$ج$_{4}$د$_{3}$ + ا$_{2}$ب$_{3}$ج$_{4}$د$_{1}$ − ا$_{2}$ب$_{3}$ج$_{1}$د$_{4}$ + ا$_{2}$ب$_{4}$ج$_{1}$د$_{3}$ − ا$_{2}$ب$_{4}$ج$_{3}$د$_{1}$

+ ا$_{3}$ب$_{1}$ج$_{2}$د$_{4}$ − ا$_{3}$ب$_{1}$ج$_{4}$د$_{2}$ + ا$_{3}$ب$_{2}$ج$_{4}$د$_{1}$ − ا$_{3}$ب$_{2}$ج$_{1}$د$_{4}$ + ا$_{3}$ب$_{4}$ج$_{1}$د$_{2}$ − ا$_{3}$ب$_{4}$ج$_{2}$د$_{1}$

+ ا$_{4}$ب$_{1}$ج$_{2}$د$_{3}$ − ا$_{4}$ب$_{1}$ج$_{3}$د$_{2}$ + ا$_{4}$ب$_{2}$ج$_{3}$د$_{1}$ − ا$_{4}$ب$_{2}$ج$_{1}$د$_{3}$ + ا$_{4}$ب$_{3}$ج$_{1}$د$_{2}$ − ا$_{4}$ب$_{3}$ج$_{2}$د$_{1}$

۴۔ ثابت کرو کہ کسی دو لاحقوں کا باہمی تبادلہ (بشرطیکہ حروف اپنی ترتیب میں ہوں) رقم کی علامت بدل دیتا ہے۔

کیونکہ اگر اِن دو عناصر کے درمیان جن کے لاحقے آپس میں بدلے جارہے ہیں م عناصر ہوں تو مجوزہ انتقال متصل لاحقوں کے ۲ م + ۱ انتقالوں کے ذریعہ عمل میں آسکتا ہے۔ اس مسئلہ کی مدد سے کسی رقم کی علامت کو ہم مثال (۱) میں بیان کردہ عام طریقہ میں انتقالات کی مطلوبہ تعداد کی بہ نسبت کم تعداد کے ذریعہ دریافت کرسکتے ہیں۔ مثلاً مثال ۲ میں رقم کی علامت معلوم کرنے کے لئے پانچ انتقال کافی ہیں پہلے ا کا ۳ کے ساتھ، پھر علی الترتیب ا کا ٦ کے ساتھ، ا کا ۴ کے ساتھ، ا کا ۵ کے ساتھ

۱۲۹ — اس دفعہ اور دفعات آیندہ کے مسئلوں میں مقطعات کے اہم ترین ابتدائی خواص شامل ہیں جو متذکرہ بالا کوشش کی ترمیم کی مدد سے، اِن تفاعلوں کو استعمال کرنے میں بہت زیادہ عملی فائدہ پہنچاتے ہیں۔

مسئلہ ا۔ اگر مقطع کے کسی دو صفوں یا کسی دو ستونوں کو آپس میں بدل دیا جائے تو مقطع کی علامت بدل جاتی ہے۔

یہ مقطع کو بنانے کے طریقہ سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے (دیکھو قاعدہ (۲) دفعہ ۱۲۸) کیونکہ دو صفوں کا باہمی تبادلہ ایسا ہی ہے جیسے دو لاحقوں کا باہمی تبادلہ اور دو ستونوں کا باہمی تبادلہ ایسا ہی ہے جیسے دو حرفوں کا باہمی تبادلہ۔ پس ہر صورت میں مقطع کے ہر رقم کی علامت بدل جاتی ہے (دیکھو امثلہ ۴ اور ۵ دفعہ ۱۲۸)۔

اس مسئلہ کی مدد سے کسی رقم کی علامت حاصل کرنیکا قاعدہ ایسی شکل میں بیان ہو سکتا ہے جو عموماً عملی مقاصد کے لئے اوپر بیان کی ہوئی شکل کی نسبت زیادہ سہولت بخش ہے۔

یہ فوراً دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ عمل کا وہ عام طریقہ جو مثال ۱ دفعہ ۱۲۸ میں واضح کیا گیا ہے ذیل کے مماثل ہے:—

(8) **صفوں (یا ستونوں) کو حرکت دیکر رقم (جسکی علامت مطلوب ہے) کے اجزاء کو صدر وتر کے محل میں لاؤ تو رقم کی علامت مثبت یا منفی ہوگی بموجب اس کے کہ ہٹاؤں کی تعداد جفت یا طاق ہو۔**

مثال

اور بالآخر ۲ کا ۱ کے ساتھ۔ یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اِس مقصد کے لئے **انتقالات** کی چھوٹی سے چھوٹی تعداد کی تعیین **ابدالات** کے نظریہ کے ایک ابتدائی مسئلہ پر منحصر ہے۔ (بیسویں باب کے ساتھ مقابلہ کرو)

(7) ۵ ــ ثابت کرو کہ کسی دو حرفوں کا باہمی تبادلہ جبکہ لاحقوں کی ترتیب وہی رہے رقم کی علامت بدل دیتا ہے۔

کیونکہ اگر دو حروف کا باہمی تبادلہ کیا جائے اور پھر متناظر عناصر کو آپس میں بدل دیا جائے تو یہ پورا عمل لاحقوں کے ایک باہمی تبادلہ کے مماثل ہے۔ مثلاً اگر $ا_۱ ب_۲ ج_۳ د_۴ ع_۵$ میں ب اور ع کو آپس میں بدل دیا جائے تو ہم $ا_۱ ع_۲ ج_۳ د_۴ ب_۵$ حاصل کرتے ہیں جو $ا_۱ ب_۵ ج_۳ د_۴ ع_۲$ کے مساوی ہے اور یہ دی ہوئی رقم سے لاحقوں ۲ اور ۵ کو آپس میں بدلنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۶ ــ ثابت کرو کہ اگر کوئی دو متصل عدد ایک ساتھ عددوں کی کسی تعداد م پر سے گذارے جائیں تو علامت غیر متغیر رہتی ہے۔

کیونکہ اگر انکو جداگانہ طور پر حرکت دیجائے تو کل عمل ۲ م عددوں پر سے حرکت دینے کے مماثل ہے۔

۷ ــ ن ویں درجہ کے مقطع میں دوسری وتری رقم $ا_ن ب_{ن-۱} ج_{ن-۲} \dots ک_۲ ل_۱$ کی علامت معلوم کرو۔

اس صورت میں ترتیب کے انقلابات کی تعداد آسانی کے ساتھ معلوم ہوتی ہے

$$۱ + ۲ + \dots + (ن-۳) + (ن-۲) + (ن-۱) = \frac{ن(ن-۱)}{۲}$$

اس لئے مطلوبہ علامت ہے $(-۱)^{\frac{ن(ن-۱)}{۲}}$

مقطع

ا	ب	ج	لا
عہ	بہ	جہ	ما
ل	م	ن	ی
لہ	مہ	نہ	۰

میں رقم لہ بہ ن لا کی علامت کیا ہے؟

یہاں چوتھی صف کو تین صفوں پر سے (یعنے تین ہٹاؤں سے) حرکت دیجائے تو لہ پہلے مقام پر آجاتا ہے۔ ابتدائی دوسری صف کا ایک اوپروار ہٹاؤ وتری رقم میں بہ کو مطلوبہ محل میں لے آتا ہے۔ اور پھر ابتدائی تیسری صف کا ایک مزید اوپروار ہٹاؤ مطلوبہ ترتیب پیدا کردیتا ہے چنانچہ رقم لہ بہ ن لا وتری محل میں آجاتی ہے۔ اب چونکہ ہٹاؤں کی تعداد طاق ہے اس لئے مطلوبہ علامت منفی ہے۔

۱۳۰ــ مسئلہ ۲۔ جب کبھی کسی مقطع میں دو صف یا دو ستون متماثل ہوں تو مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔

کیونکہ مسئلہ ا کی رو سے ان دو خطوں کے باہمی تبادلے سے مقطع ∆ کی علامت بدلنی چاہیئے لیکن دو متماثل صفون یا ستونوں کا باہمی تبادلہ کسی طور پر بھی مقطع کو بدل نہیں سکتا۔ پس ∆ = -∆ یعنی ∆ = ۰

۱۳۱ــ مسئلہ ۳۔ مقطع کی قیمت نہیں بدلتی اگر صفوں کو ستونوں کی طرح اور ستونوں کو صفوں کی طرح لکھا جائے۔

کیونکہ دونوں صورتوں میں ہر صف سے ایک جزو ترکیبی اور ہر ستون سے ایک جزو ترکیبی لینے سے تمام ارقام پیدا ہوتی ہیں اور ظاہر ہے کہ دونوں صورتوں میں ایسی سب رقمیں قیمت میں

وہی ہونگی چنانچہ صدر رقم مثلاً وہی ہوتی ہے اور (مسئلہ ا کی رو سے) کسی دوسری رقم کی علامت متعین کرنے میں اسکو صدر وتر کے محل میں لانے کے لئے پہلی صورت میں صفوں کے ہٹاوں کی جتنی تعداد درکار ہوتی ہے دوسری صورت میں بھی ستونوں کے ہٹاونکی اتنی ہی تعداد درکار ہے۔

مثال

ا۱	ب۱	ج۱	د۱
ا۲	ب۲	ج۲	د۲
ا۳	ب۳	ج۳	د۳
ا۴	ب۴	ج۴	د۴

≡

ا۱	ا۲	ا۳	ا۴
ب۱	ب۲	ب۳	ب۴
ج۱	ج۲	ج۳	ج۴
د۱	د۲	د۳	د۴

یہاں کسی رقم ا۲ ب۴ ج۱ د۳ کی علامت دونوں مقطعوں میں وہی ہے۔ کیونکہ پہلے مقطع میں صفوں کے تین ہٹاوں سے یہ رقم صدر محل میں آجاتی ہے اور دوسرے مقطع میں ستونوں کے ہٹاوں کی اتنی ہی تعداد ان عناصر کو صدر محل میں لانیکے لئے درکار ہے۔

۱۳۲۔ مسئلہ ۴۔ اگر کسی خط کے ہر عنصر کو ایک ہی جزو ضربی سے ضرب دیں تو مقطع اس جزو ضربی سے ضرب کھا جاتا ہے۔

کیونکہ مقطع کی ہر رقم میں کسی صف یا کسی ستون سے ایک اور صرف ایک عنصر شامل ہونا چاہئے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر کسی خط کے عناصر کسی دوسرے متوازی خط کے عناصر سے بقدر ایک ہی جزو ضربی کے مختلف ہوں تو مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر کسی خط کے تمام عنصروں کی علامتیں بدل دیجائیں تو مقطع کی علامت بدلجاتی ہے۔ کیونکہ یہ بات جزو ضربی -۱ سے ضرب دینے کے مماثل ہے۔

مثالیں

۱۔

$$\begin{vmatrix} \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ک ا}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ک ا}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ک ا}_3 \end{vmatrix} \equiv \text{ک} \begin{vmatrix} \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

۲۔

$$\begin{vmatrix} \text{ع}_2 & \text{م ع}_1 & \text{ع}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{م ب}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{م ج}_1 & \text{ج}_1 \end{vmatrix} \equiv \text{م} \begin{vmatrix} \text{ع}_2 & \text{ع}_1 & \text{ع}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_1 & \text{ج}_1 \end{vmatrix} \equiv ۰$$

۳۔ ثابت کرو کہ ذیل کا مقطع معدوم ہو جاتا ہے:۔

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۷ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۹ & ۸ \\ ۹ & ۲۱ & ۱۵ & ۶ \end{vmatrix}$$

۴۔ متماثلہ ذیل ثابت کرو۔

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^2 & \text{ا} & \text{ب ج} \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & \text{ج ا} \\ \text{ج}^2 & \text{ج} & \text{ا ب} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}^3 & \text{ا}^2 & ۱ \\ \text{ب}^3 & \text{ب}^2 & ۱ \\ \text{ج}^3 & \text{ج}^2 & ۱ \end{vmatrix}$$

پہلے مقطع کو Δ سے تعبیر کرو اور اسکی صفوں کو علی الترتیب
ا، ب، ج سے ضرب دو تو

$$\text{ا ب ج}\,\Delta = \begin{vmatrix} \text{ا ب ج} & \text{ا}^{۲} & \text{ا}^{۳} \\ \text{ا ب ج} & \text{ب}^{۲} & \text{ب}^{۳} \\ \text{ا ب ج} & \text{ج}^{۲} & \text{ج}^{۳} \end{vmatrix}$$

اب اسکو ا ب ج سے تقسیم کرو تو نتیجہ نکل آئیگا۔

۵۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{به جه ضه} & \text{عه} & \text{عه}^{۲} & \text{عه}^{۳} \\ \text{جه ضه عه} & \text{به} & \text{به}^{۲} & \text{به}^{۳} \\ \text{ضه عه به} & \text{جه} & \text{جه}^{۲} & \text{جه}^{۳} \\ \text{عه به جه} & \text{ضه} & \text{ضه}^{۲} & \text{ضه}^{۳} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & \text{عه}^{۲} & \text{عه}^{۳} & \text{عه}^{۴} \\ ۱ & \text{به}^{۲} & \text{به}^{۳} & \text{به}^{۴} \\ ۱ & \text{جه}^{۲} & \text{جه}^{۳} & \text{جه}^{۴} \\ ۱ & \text{ضه}^{۲} & \text{ضه}^{۳} & \text{ضه}^{۴} \end{vmatrix}$$

۶۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۷ \\ -۴ & -۳ & ۸ \\ ۶ & ۵ & -۹ \end{vmatrix} = ۲ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۷ \\ ۲ & ۳ & ۸ \\ ۳ & ۵ & ۹ \end{vmatrix}$$

دوسرے صف کی تمام علامتیں بدلو اور پھر تیسرے ستون کی۔

۷۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{عه} & \text{به} & \text{جه} \\ \text{عَه} & \text{بَه} & \text{جَه} \\ \text{عًه} & \text{بًه} & \text{جًه} \end{vmatrix} = \frac{۱}{\text{عه به جه}} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ \text{عَه به جه} & \text{بَه جه عه} & \text{جَه عه به} \\ \text{عًه به جه} & \text{بًه جه عه} & \text{جًه عه به} \end{vmatrix}$$

پہلے مقطع کے ستونوں کو علی الترتیب به جه، جه عه، عه به سے ضرب دو اور پھر پہلی صف کو عه به جه سے تقسیم کرو۔

یہ ظاہر ہے کہ اسی طرح کے عمل سے کسی مقطع کو ایسے مقطع میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس میں کسی خاص صف یا ستون کے عناصر اکائیاں ہوں۔

۸ — مقطع ذیل کو ایسے مقطع میں تحویل کرو جسمیں پہلی صف کے عناصر اکائیاں ہوں :—

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

یہاں چونکہ ۴، ۲، ۵، ۱۰ کا ذو اضعاف اقل ۲۰ ہے ستونوں کو ترتیب وار ۵، ۱۰، ۴، ۲ سے ضرب دینا کافی ہے۔ چنانچہ ہمیں اس طور پر حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 6 & 24 & 10 & 5 \\ 10 & 0 & 30 & 35 \\ 16 & 20 & 20 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{2\times 4\times 10\times 5} = \Delta$$

اب پہلی صف سے جزو ضربی ۲۰، تیسری صف سے ۵، اور چوتھی صف سے ۴ نکالنے سے بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 24 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \Delta$$

۹ — ثابت کرو

$$(\text{بہ} - \text{جہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{بہ}) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{جہ} & \text{بہ} & \text{عہ} \\ \text{جہ}^2 & \text{بہ}^2 & \text{عہ}^2 \end{vmatrix}$$

اگر بہ، جہ کے مساوی ہوتا تو دو ستون متماثل ہو جاتے اس لئے مقطع میں (بہ - جہ) ایک جزو ضربی ہونا چاہئے۔ اسی طرح (جہ - عہ)

اور (عہ - بہ) بھی اجزائے ضربی ہونے چاہئیں۔ پس ان تین فرقوں کا حاصل ضرب مقطع کی قیمت سے صرف اس طور پر مختلف ہو سکتا ہے کہ اسکا ایک جزو ضربی عددی ہو کیونکہ دونوں تفاعل عہ، بہ، جہ میں تیسرے درجہ کے ہیں۔ رقم بہ جہ² کا مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ جزو ضربی +۱ ہے۔

۱۰۔ اسی طرح متماثلہ ذیل ثابت کرو:۔

۱	۱	۱	۱
عہ	بہ	جہ	ضہ
عہ²	بہ²	جہ²	ضہ²
عہ³	بہ³	جہ³	ضہ³

≡ - (بہ - جہ) (عہ - ضہ) (جہ - عہ) (بہ - ضہ) (عہ - بہ) (جہ - ضہ)

یہ ظاہر ہے کہ عام صورت میں اسی طرح کے ثبوت سے ن مقداروں عہ، بہ، جہ، ... لہ کا اس نمونہ کا مقطع قیمت میں، $\frac{1}{2}$ ن (ن - ۱) فرقوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جو اِن ن مقداروں سے بن سکتے ہیں۔

۱۳۲۔ صغیر مقطعات - تعریفات۔

جب کسی مقطع سے صفوں کی کوئی تعداد اور ستونوں کی اتنی ہی تعداد نکال لیجاتی ہے تو وہ مقطع جو باقی عناصر سے (اِنکو اضافی مقامات پر بحال رکھکر) بنایا جاتا ہے صغیر مقطع کہلاتا ہے۔

اگر ایک صف اور ایک ستون نکال لئے جائیں تو اس کے جواب میں جو صغیر مقطع حاصل ہوگا اس کو ہم پہلا صغیر کہینگے۔ اگر دو صف اور دو ستون نکالے جائیں تو ایسے صغیر مقطع کو ہم دوسرا صغیر کہینگے اور وقس علیٰ ہذا۔ نکالی ہوئی صفوں اور ستونوں میں چند مشترک عناصر ہوتے ہیں جن سے ایک مقطع بنتا ہے اِن کو نکال لینے سے جو صغیر مقطع باقی رہ جاتا ہے اسکو ہم اس مقطع کا متمم کہینگے۔ چنانچہ

اُس صغیر مقطع کو جو صدر عنصر ا کا تکمیلی ہے صدر پہلا صغیر کہتے ہیں اور پھر اسکا صدر پہلا صغیر ابتدائی مقطع کا صدر دوسرا صغیر ہے۔

مقطع کو عموماً ہم ∆ سے تعبیر کرینگے۔ $\Delta_{ع}$ سے وہ پہلا صغیر تعبیر ہوگا جو ∆ میں سے وہ صف اور وہ ستون نکال لینے سے بنتا ہے جنمیں عنصر عہ شامل ہے۔ $\Delta_{ع، ب}$ سے وہ دوسرا صغیر تعبیر ہوگا جو اُن دو صفوں اور دو ستونوں کو نکال لینے سے پیدا ہوتا ہے جنمیں عہ اور بہ شامل ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ چنانچہ $\Delta_{ا}$ سے صدر پہلا صغیر اور $\Delta_{ا، ب}$ سے صدر دوسرا صغیر تعبیر ہوتے ہیں۔

مقطع ∆ کو جو عناصر ا، ب، ج، وغیرہ سے بنتا ہے اختصار کی خاطر صدر رقم کو خطوط وحدانی میں رکھکر اکثر تعبیر کیا جائیگا مثلاً

$$\Delta \equiv (ا_{1}\ ب_{2}\ ج_{3} \ldots ل_{ن})$$

∆ کو تعبیر کرنے میں ترقیم $\Sigma \pm ا_{1}\ ب_{2}\ ج_{3} \ldots ل_{ن}$ بھی استعمال کیجائیگی جسکا مطلب یہ ہے کہ ن لاحقوں سے جتنی ترتیبیں ملسکتی ہیں ان کو لیکر ارقام (انکو صحیح علامتیں لگاکر) بنائی جائیں تو انکا مجموعہ اس ترقیم سے تعبیر ہوتا ہے۔

۱۳۴۔ **مقطعات کا پھیلاؤ۔** کسی مقطع کی ہر رقم میں چونکہ ہر صف میں سے اور ہر ستون میں سے ایک اور صرف ایک عنصر شامل ہوتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ∆ کسی ایک صف یا کسی

ایک ستون کے عناصر کا ایک خطی اور متجانس تفاعل ہے۔

اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

(13) $\Delta = \text{ا}_{1}\text{ا}_{1} + \text{ا}_{2}\text{ا}_{2} + \text{ا}_{3}\text{ا}_{3} + \cdots\cdots$

$\Delta = \text{ب}_{1}\text{ب}_{1} + \text{ب}_{2}\text{ب}_{2} + \text{ب}_{3}\text{ب}_{3} + \cdots\cdots$

اور نیز $\Delta = \text{ا}_{1}\text{ا}_{1} + \text{ب}_{1}\text{ب}_{1} + \text{ج}_{1}\text{ج}_{1} + \cdots\cdots$

$\Delta = \text{ا}_{2}\text{ا}_{2} + \text{ب}_{2}\text{ب}_{2} + \text{ج}_{2}\text{ج}_{2} + \cdots\cdots$

دفعہ ۱۲۸ مثال ۳ پر غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ چوتھے رتبہ کا جو مقطع وہاں پھیلا کر لکھا گیا ہے وہ ذیل میں درج کردہ طریقہ سے بنا ہے:—

$$\Delta = \text{ا}_{1}\begin{vmatrix} \text{ب}_{2} & \text{ج}_{2} & \text{د}_{2} \\ \text{ب}_{3} & \text{ج}_{3} & \text{د}_{3} \\ \text{ب}_{4} & \text{ج}_{4} & \text{د}_{4} \end{vmatrix} + \text{ا}_{2}\begin{vmatrix} \text{ب}_{1} & \text{ج}_{1} & \text{د}_{1} \\ \text{ب}_{3} & \text{ج}_{3} & \text{د}_{3} \\ \text{ب}_{4} & \text{ج}_{4} & \text{د}_{4} \end{vmatrix} + \text{ا}_{3}\begin{vmatrix} \text{ب}_{1} & \text{ج}_{1} & \text{د}_{1} \\ \text{ب}_{2} & \text{ج}_{2} & \text{د}_{2} \\ \text{ب}_{4} & \text{ج}_{4} & \text{د}_{4} \end{vmatrix}$$

$$+ \text{ا}_{4}\begin{vmatrix} \text{ب}_{1} & \text{ج}_{1} & \text{د}_{1} \\ \text{ب}_{2} & \text{ج}_{2} & \text{د}_{2} \\ \text{ب}_{3} & \text{ج}_{3} & \text{د}_{3} \end{vmatrix}$$

اب ہم یہ بتائینگے کہ عام صورت میں Δ کو شکل

$$\Delta = \text{ا}_{1}\text{ا}_{1} + \text{ا}_{2}\text{ا}_{2} + \text{ا}_{3}\text{ا}_{3} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{ا}_{\text{ن}}$$

میں لکھنے سے سر ا_{1}، ا_{2} وغیرہ ن۔ ۱ رتبہ کے مقطعات ہیں۔ لاحقوں ۱، ۲، ۳، .... ، ن کی تمام ترتیبیں معلوم کرنے میں

پہلے فرض کرو کہ ا صدر مقام پر رہتا ہے جیسا کہ متذکرہ بالا مثال میں کیا گیا ہے۔ تب ہمیں ۱ × ۲ × ۳ × .... × ن رقمیں ملینگی جن میں $\text{ا}_۱$ جزو ضربی کے طور پر شامل ہوگا اور اس لئے

$$\text{ا}_۱ \text{ا}_۱ = \text{ا}_۱ \Sigma \pm \text{ب}_۲ \text{ج}_۳ \ldots\ldots \text{ل}_\text{ن}$$

پس

$$\text{ا}_۱ = \Sigma \pm \text{ب}_۲ \text{ج}_۳ \ldots \text{ل}_\text{ن} = \begin{vmatrix} \text{ب}_۲ & \text{ج}_۲ & \ldots & \text{ل}_۲ \\ \text{ب}_۳ & \text{ج}_۳ & \ldots & \text{ل}_۳ \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{ب}_\text{ن} & \text{ج}_\text{ن} & & \text{ل}_\text{ن} \end{vmatrix}$$

اور یہ مقطع وہ صغیر ہے جو عنصر $\text{ا}_۱$ کے جواب میں حاصل ہوتا ہے۔ یعنی $\text{ا}_۱ = \Delta_{\text{ا}_۱}$

$\text{ا}_۲$ کی قیمت معلوم کرنے میں ہم $\text{ا}_۲$ کو صفوں کے ایک ہٹاؤ سے صدر مقام پر لاتے ہیں۔ اس سے Δ کی علامت بدلجاتی ہے اور اسلئے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\text{ا}_۲ = -\Delta_{\text{ا}_۲}$ یعنی $\text{ا}_۲ =$ اُس صغیر کے جو بہ تبدیل علامت $\text{ا}_۲$ کے جواب میں ہے۔ پھر دو ہٹاؤں سے $\text{ا}_۳$ کو صدری مقام پر لانے سے $\text{ا}_۳ = \Delta_{\text{ا}_۳}$ اور علیٰ ہذا۔

پس ہم عام صورت میں یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ

$$\Delta = \text{ا}_۱ \Delta_{\text{ا}_۱} - \text{ا}_۲ \Delta_{\text{ا}_۲} + \text{ا}_۳ \Delta_{\text{ا}_۳} - \text{ا}_۴ \Delta_{\text{ا}_۴} + \ldots\ldots$$

اسی طرح ہم Δ کو کسی دوسرے ستون یا کسی صف کے

عناصر کی رقوم میں پھیلا سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\Delta = ا_1 \Delta_{ا_1} - ب_1 \Delta_{ب_1} + ج_1 \Delta_{ج_1} - \cdots\cdots$$

اگر ہم اِس صغیر کی ٹھیک علامت معلوم کرنا چاہیں جو مقطع کے کسی جزو ترکیبی کے ساتھ مقطع کے پھیلاؤ میں ضرب کھاتا ہے تو ہمیں صرف یہ غور کرنا ہوگا کہ کتنے ہٹاؤں سے یہ جزو ترکیبی صدر مقام پر آجائیگا۔ مثلاً فرض کرو کہ مقطع ($ا_1$ $ب_2$ $ج_3$ $د_4$ $ہ_5$ $ع_6$) کو چھ ستون کی رقوم میں پھیلایا گیا ہے اور یہ معلوم کرنا ہے کہ $د_3 \Delta_{د_3}$ کو کونسی علامت لگانی چاہئے۔ یہاں اوپر وار دو ہٹاؤں اور بعد میں دائیں جانب تین ہٹاؤں سے $د_3$ صدر مقام پر آجائیگا۔ پس مطلوبہ علامت منفی ہے۔ اس قاعدے کو سادہ طور پر یوں بیان کیا جا سکتا ہے :۔ اِسے لےکر پہلی صف پر زیر بحث جزو ترکیبی تک چلو اور پھر اُس ستون سے نیچے اترو جسمیں یہ جزو ترکیبی ہے تو اس جزو پر پہنچنے سے پہلے جتنے حروف پر سے گذرنا پڑیگا اُنکی تعداد سے صغیر کی علامت کا تصفیہ ہوگا۔ متذکرہ بالا مثال میں ہم $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$، $د_1$، $د_2$ کل پانچ شمار کرتے ہیں اور یہ عدد طاق ہونے کی وجہ سے مطلوبہ علامت منفی لیتے ہیں۔

مقطع کے پھیلاؤ کے لئے متذکرہ صدر دونوں ترقیموں کو برقرار رکھنا سہولت کا باعث ہوگا۔ مقطع کو صغائر کی رقوم میں اِن کو

باری باری سے مثبت اور منفی علامتیں لگا کر پھیلانا اسوقت مفید ہے جبکہ مقطع کی قیمت کو نچلے درجہ کے مقطعوں میں متواتر تحویل کرکے محسوب کرنا مطلوب ہو۔ لیکن بعض دیگر مقاصد کے لئے جیساکہ دفعات آئندہ میں معلوم ہوگا قبل الذکر ترتیم کا استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے جس میں علامتیں سب کی سب مثبت ہوتی ہیں (خواہ کوئی صف یا ستون زیر بحث ہو) اور کسی جزو ترکیبی کا سر (یا اس کے ساتھ کا جزو ضربی) متناظر بڑے حرف سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس بڑے حرف کی بجائے متناظر صغیر مقطع اسکی ٹھیک علامت کے ساتھ مندرج کیا جائے (جس کو معلوم کرنے کا طریقہ اوپر بیان کردیا گیا ہے) تو بعد الذکر ترتیم قبل الذکر میں بدلجاتی ہے۔

مثالیں (15)

۱—

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ا}_1\text{ب}_3\text{ج}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1\text{ج}_3 + \text{ا}_2\text{ب}_3\text{ج}_1 + \text{ا}_3\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ا}_3\text{ب}_2\text{ج}_1$$

(دفعہ ۱۲۷، (۲) کے ساتھ مقابلہ کرو)

۲—

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} = \text{ا} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ف} \\ \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} - \text{ھ} \begin{vmatrix} \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} + \text{گ} \begin{vmatrix} \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ب} & \text{ف} \end{vmatrix}$$

$$= \text{ابج} + 2\,\text{فگھ} - \text{اف}^2 - \text{بگ}^2 - \text{جھ}^2$$

۳— چوتھے رتبہ کے مقطع کو چوتھی صف کے عناصر کی رقوم میں پھیلاؤ—

$$\Delta = -\text{ا}_4 \Delta_{\text{ا}_4} + \text{ب}_4 \Delta_{\text{ب}_4} - \text{ج}_4 \Delta_{\text{ج}_4} + \text{د}_4 \Delta_{\text{د}_4}$$

$$= -\text{ا}_4\begin{vmatrix}\text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1\\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2\\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3\end{vmatrix} + \text{ب}_4\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2\\ \text{ا}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3\end{vmatrix} - \text{ج}_4\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{د}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{د}_2\\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{د}_3\end{vmatrix} + \text{د}_4\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2\\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3\end{vmatrix}$$

جب تیسرے رتبہ کے مقطعات کو پھیلایا جاتا ہے تو دفعہ ۱۲۸ مثال ۳ کا جملہ حاصل ہو گا۔ طالب علم اس کی تصدیق آسانی کے ساتھ کر سکتا ہے۔

۴ ـ

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 7 & 6 & 1\\ 5 & 3 & 8\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}6 & 1\\ 3 & 8\end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 8\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 1\end{vmatrix}$$

$$= 3(48-3) - 7(16-12) + 5(2-24)$$

$$= -3$$

۵ ـ مقطع ذیل کی قیمت معلوم کرو:۔

$$\Delta = \begin{vmatrix}8 & 7 & 2 & 20\\ 3 & 1 & 4 & 7\\ 5 & 0 & 11 & 0\\ 8 & 1 & 0 & 6\end{vmatrix}$$

تیسری صف کی رقوم میں پھیلانے سے چونکہ اس میں دو عناصر صفر ہیں ہم بغیر دقت کے حاصل کرتے ہیں

$$\Delta = 5\begin{vmatrix}7 & 2 & 20\\ 1 & 4 & 7\\ 1 & 0 & 6\end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix}8 & 7 & 20\\ 3 & 1 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{vmatrix}$$

اور تیسرے رتبہ کے ان دو مقطعوں کو پھیلانے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $\Delta = 2188$

۶ ـ پھیلاؤ

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{ج} & \text{ب} & \text{د} \\ \text{ج} & 0 & \text{ا} & \text{ع} \\ \text{ب} & \text{ا} & 0 & \text{ف} \\ \text{د} & \text{ع} & \text{ف} & 0 \end{vmatrix}$$

یہ پھیلاؤ ہے

$$\text{ا}^2\text{د}^2 + \text{ب}^2\text{ع}^2 + \text{ج}^2\text{ف}^2 - ۲\,\text{ب ج ع ف} - ۲\,\text{ج ا ف د}$$
$$- ۲\,\text{ا ب د ع} ،$$

اسلئے دیا ہوا مقطع مندرجۂ ذیل چار اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

$$\sqrt{\text{ا د}} + \sqrt{\text{ب ع}} + \sqrt{\text{ج ف}} ،\quad \sqrt{\text{ا د}} - \sqrt{\text{ب ع}} - \sqrt{\text{ج ف}}$$
$$- \sqrt{\text{ا د}} + \sqrt{\text{ب ع}} - \sqrt{\text{ج ف}} ،\quad - \sqrt{\text{ا د}} - \sqrt{\text{ب ع}} + \sqrt{\text{ج ف}}$$

یہ نتیجہ بعض اوقات مفید ثابت ہوتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ -\text{عہ} & \text{ا} & \text{جہ}' & -\text{بہ}' \\ -\text{بہ} & -\text{جہ}' & \text{ا} & \text{عہ}' \\ -\text{جہ} & \text{بہ}' & -\text{عہ}' & \text{ا} \end{vmatrix} = ۱ + \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 + \text{عہ}'^2 + \text{بہ}'^2 + \text{جہ}'^2 + (\text{عہ عہ}' + \text{بہ بہ}' + \text{جہ جہ}')^2$$

۸۔ پھیلاؤ

$$\begin{vmatrix} -\text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & -\text{ا} & \text{د} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{د} & -\text{ا} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & -\text{ا} \end{vmatrix}$$

جواب:- $\text{ا}^4 + \text{ب}^4 + \text{ج}^4 + \text{د}^4 - ۲\,\text{ب}^2\text{ج}^2 - ۲\,\text{ج}^2\text{ا}^2$
$- ۲\,\text{ا}^2\text{ب}^2 - ۲\,\text{ا}^2\text{د}^2 - ۲\,\text{ب}^2\text{د}^2 - ۲\,\text{ج}^2\text{د}^2 - ۸\,\text{ا ب ج د}$

۹ـ مندرجۂ ذیل متماثلہ ثابت کرو اور مقطعوں کو پھیلاؤ :ـ

۰	ا	ا	ا	≡	۰	لا	ما	ی
ا	۰	ی²	ما²		لا	۰	ی	ما
ا	ی²	۰	لا²		ما	ی	۰	لا
ا	ما²	لا²	۰		ی	ما	لا	۰

جواب :ـ لا⁴ + ما⁴ + ی⁴ ـ ۲ ما² ی² ـ ۲ ی² لا² ـ ۲ لا² ما²

۱۰ـ ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو :ـ

Δ ≡	ا	ھ	گ	لہ
	ھ	ب	ف	مہ
	گ	ف	ج	نہ
	لہ	مہ	نہ	۰

اول آخری صف یا آخری ستون کی رقوم میں پھیلاؤ اور پھر ہر تیسرے رتبہ کے مقطع کو لہ، مہ، نہ کی رقوم میں پھیلاؤ۔

جواب :ـ ـ Δ = (ب ج ـ ف²) لہ² + (ج ا ـ گ²) مہ²

+ (ا ب ـ ھ²) نہ² + ۲ (گ ھ ـ ا ف) مہ نہ
+ ۲ (ھ ف ـ ب گ) نہ لہ + (ف گ ـ ج ھ) لہ مہ

۱۳۵ـ مقطع کو پھیلانیکا لاپلاس کا طریقہ ـ دفعہ گذشتہ میں جس (17)
پھیلاؤ کی تشریح کیگئی وہ لاپلاس کے بیان کردہ پھیلاؤ میں شامل ہے یہ پھیلاؤ زیادہ عام طریقہ پر حاوی ہے ـ اس میں مقطع کو کسی خط کے اجزائے ترکیبی کے خطی تفاعل کے طور پر پھیلانے کی بجائے ہم اس کو صغیروں کے خطی تفاعل کے طور پر جس میں خطوں کی کوئی تعداد شامل ہو سکتی ہے پھیلاتے ہیں ـ

مثلاً کسی مقطع کے پہلے دو ستونوں (ا ، ب) پر غور کرو اور اور فرض کرو کہ اِن دو ستونوں کی کسی دو صفوں کو لینے سے دوسرے رتبہ ($ا_{ف}$ ، $ب_{ق}$) کے جتنے مقطعے بن سکتے ہیں بنا لئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ $ا_{ف}$ اور $ب_{ق}$ خطوں کو دبا دینے سے (یعنے خارج تصور کرنے سے) جو مقطع بنتا ہے وہ $\Delta_{ف،ق}$ سے تعبیر ہوتا ہے۔ اب مقطع کو شکل $\sum \pm (ا_{ف} \ ب_{ق}) \Delta_{ف،ق}$ میں پھیلایا جا سکتا ہے جس میں ہر رقم دو متمم مقطعوں کا حاصل ضرب ہے (دیکھو دفعہ ۲۳) اسکو ثابت کرنیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مقطع کی ہر رقم میں ستون ا سے ایک عنصر اور ستون ب سے ایک عنصر شامل ہونا چاہئے۔ فرض کرو کہ ایک رقم میں جزو ضربی $ا_{ف} \ ب_{ق}$ شامل ہوتا ہے۔ تب (ف اور ق کو باہم بدلنے سے) ایک دوسری رقم بھی ہونی چاہئے جو اوپر کی رقم سے صرف علامت میں مختلف ہو اور اس کے لاحقے آپس میں بدلے ہوئے ہوں۔ پس مقطع کو شکل $\sum (ا_{ف} \ ب_{ق}) \Delta'_{ف،ق}$ میں پھیلا سکتے ہیں جہاں $\Delta'_{ف،ق}$ صریحاً اُن سب رقموں کا مجموعہ ہے جو حروف ج ، د ، ع ، وغیرہ کے (ن - ۲) لاحقوں کو ہر ممکن طریقہ سے ترتیب دینے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ یعنے یہ $\pm \Delta_{ف،ق}$ ہے کسی مخصوص صورت میں علامت کو متعین کرنیکے لئے دفعہ ۱۲،۸ کا قاعدہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس استدلال کو عام صورت کے لئے بھی

توسیع دیجاسکتی ہے۔ فرض کرو کہ ستونوں کی کوئی تعداد ف لیگئی ہے اور ان ستونوں کی ف صفوں کو لیکر تمام ممکن صغیر مقطعے بنائے گئے ہیں۔ تب ان میں سے ہر صغیر کو متمم صغیر سے ضرب دینا چاہیے اور پھر ایسے تمام حاصل ضربوں کے مجموعہ سے مقطع کو بیان کرنا چاہئیے بشرطیکہ ہر حاصل ضرب کی علامت متذکرۂ بالا قانون سے معلوم کرلی گئی ہو۔

مثالیں

۱— مقطع (ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ د$_4$) کو پہلے دو ستونوں سے بننے والے دوسرے رتبہ کے صغیر مقطعوں کی رقوم میں پھیلاؤ۔

خطوط وحدانی کی ترقیم استعمال کرکے ہم پھیلاؤ کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں:—

(ا$_1$ ب$_2$)(ج$_3$ د$_4$) - (ا$_1$ ب$_3$)(ج$_2$ د$_4$) + (ا$_1$ ب$_4$)(ج$_2$ د$_3$)

+ (ا$_2$ ب$_3$)(ج$_1$ د$_4$) - (ا$_2$ ب$_4$)(ج$_1$ د$_3$) + (ا$_3$ ب$_4$)(ج$_1$ د$_2$)

جسمیں کسی حاصل ضرب کی علامت اس طور پر مقرر کیجاتی ہے کہ اول جزو ضربی میں شامل ہونیوالی دو صفوں کو پہلے اور دوسرے محلوں میں حرکت دیجائے۔ مثلاً دوسری اور چوتھی صفوں کو ان محلوں میں حرکت دینے کے لئے تین ہٹاوں کی ضرورت ہے اسلئے حاصل ضرب (ا$_2$ ب$_4$)(ج$_1$ د$_3$) کی علامت منفی ہے۔ (18)

۲— اسی طرح مقطع (ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ د$_4$ ع$_5$) کو پھیلاؤ۔

جواب:— (ا$_1$ ب$_2$)(ج$_3$ د$_4$ ع$_5$) - (ا$_1$ ب$_3$)(ج$_2$ د$_4$ ع$_5$) + (ا$_1$ ب$_4$)(ج$_2$ د$_3$ ع$_5$)

-(ا۱ ب۵)(ج۲ د۳ ع۴) + (ا۲ ب۳)(ج۱ د۴ ع۵) - (ا۲ ب۴)(ج۱ د۳ ع۵)

+ (ا۲ ب۵)(ج۱ د۳ ع۴) - (ا۳ ب۴)(ج۱ د۲ ع۵) + (ا۳ ب۵)(ج۱ د۲ ع۴)

- (ا۴ ب۵)(ج۱ د۲ ع۳)

۳۔ ذیل کی متماثلہ ثابت کرو:-

ا۱	ب۱	ج۱	د۱	ع۱	ف۱
ا۲	ب۲	ج۲	د۲	ع۲	ف۲
ا۳	ب۳	ج۳	د۳	ع۳	ف۳
۰	۰	۰	عہ۱	بہ۱	جہ۱
۰	۰	۰	عہ۲	بہ۲	جہ۲
۰	۰	۰	عہ۳	بہ۳	جہ۳

≡

ا۱	ب۱	ج۱
ا۲	ب۲	ج۲
ا۳	ب۳	ج۳

عہ۱	بہ۱	جہ۱
عہ۲	بہ۲	جہ۲
عہ۳	بہ۳	جہ۳

اول تین ستونوں سے صغیر مقطعوں کو بنا کر انکی رقوم میں مقطع کو پھیلانے سے اوپر کی متماثلہ ثابت ہو جاتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ ایسے تمام صغیر مقطعے (کم از کم ایک صفروں والی صف شامل ہونے کی وجہ سے) معدوم ہو جاتے ہیں سوائے ایک صغیر مقطع (ا۱ ب۲ ج۳) کے۔

عام صورت میں اسی طرح یہ معلوم ہوگا کہ اگر ۲م ویں رتبہ والے مقطع میں م۲ صفروں کا مربع کسی محل میں شامل ہو تو اس مقطع کو م ویں رتبہ کے دو مقطعوں کے حاصل ضرب سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

۴۔ مقطع

ا	ھ	گ	لہ	لہَ
ھ	ب	ف	مہ	مہَ
گ	ف	ج	نہ	نہَ
لہ	مہ	نہ	۰	۰
لہَ	مہَ	نہَ	۰	۰

کو عہ، یہ، جہ کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں
عہ = مہ نہَ - مہَ نہ، یہ = نہ لہَ - نہَ لہ، جہ = لہ مہَ - لہَ مہ
جواب:- ا عہ^{۲} + ب یہ^{۲} + ج جہ^{۲} + ۲ف یہ جہ + ۲گ جہ عہ
+ ۲ھ عہ یہ

۵ ـــ دفعہ ہذا کے پھیلاؤ کی تصدیق کرنیکے لئے ثابت کرو کہ عام صورت میں اس سے رقموں کی ٹھیک تعداد حاصل ہوتی ہے۔

ن ویں رتبہ کے مقطع کے پہلے ر ستونوں پر غور کرو۔ ان سے صغیر مقطعوں کی جو تعداد بنتی ہے وہ ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ اس عدد کو اگر ۱ × ۲ × ۳ × ... × ر سے (جو ہر صغیر مقطع میں رقموں کی تعداد ہے) اور ۱ × ۲ × ۳ × ... × (ن - ر) سے ضرب دیا جائے تو ۱ × ۲ × ۳ × ... × ن حاصل ہوگا جو مقطع میں رقموں کی تعداد کے مساوی ہے۔

۱۳۶ ـــ مقطع کا پھیلاؤ صدر عناصر کے حاصل ضربوں میں۔ (19)

اس دفعہ اور آئندہ دفعات میں پھیلاؤ کے دو مزید طریقے بتائے جائینگے جو خاص شکل کے چند مقطعوں کو پھیلانے میں مفید ثابت ہونگے۔ ذیل کا پھیلاؤ یہ بتانے کے لئے کافی ہے کہ کسی مقطع کو صدر عناصر کے حاصل ضربوں میں کس طرح پھیلایا جا سکتا ہے:-

مقطع

$ا_{۱}$	$ب_{۱}$	$ج_{۱}$	$د_{۱}$
$ا_{۲}$	$ب_{۲}$	$ج_{۲}$	$د_{۲}$
$ا_{۳}$	$ب_{۳}$	$ج_{۳}$	$د_{۳}$
$ا_{۴}$	$ب_{۴}$	$ج_{۴}$	$د_{۴}$

کو جو چوتھے رتبہ کا ہے ا، ب، ج، د کے حاصل ضربوں کی

بموجب پھیلانا مقصود ہے۔ صدر عناصر کو اہمیت دینے کی خاطر ہم نے ا، ب، ج، د کی بجائے بڑے حروف ا ب ج د سے کام لیا ہے۔ پھیلاؤ کا عمل کرنے کے بعد یہ ظاہر ہے کہ نتیجہ کی شکل حسب ذیل ہوگی :-

Δ ≡ Δ. + Σ لَ ا + Σ لَ ا ب + ا ب ج د

جہاں Δ. میں وہ سب رقمیں شامل ہیں جنمیں کوئی صدر عنصر واقع نہیں ہوتا، Σ لَ ا وہ سب رقموں کا مجموعہ ہے جنمیں صرف ایک صدر عنصر واقع ہوتا ہے، Σ لَ ا ب وہ سب رقموں کا مجموعہ ہے جنمیں صدر عناصر کے ایک ایک زوج کا حاصل ضرب پایا جاتا ہے اور صدر رقم ا ب ج د اِن تمام صدر عناصر کا حاصل ضرب ہے۔ یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ مندرجۂ بالا پھیلاو میں شکل لَ ا ب ج کی کوئی رقم شامل نہیں ہوتی کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ پھیلا ہوا مقطع عام طور پر ایسی رقموں پر مشتمل نہیں ہو سکتا جنمیں سوائے ایک کے باقی سب صدر عناصر کے حاصل ضرب واقع ہوتے ہوں کیونکہ ایسے کسی حاصل ضرب کا سر بچا ہوا ونری عنصر ہوگا۔ اب صرف یہ دیکھنا باقی ہے کہ Δ. کی شکل کیا ہے اور لَ، مَ، .... لَ، مَ، .... وغیرہ کی قیمتیں کیا ہیں۔

مندرجۂ بالا متماثلہ میں ا، ب، ج، د سب کو صفر کے مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

Δ. ≡

۰	ب۱	ج۱	د۱
ا۲	۰	ج۲	د۲
ا۳	ب۳	۰	د۳
ا۴	ب۴	ج۴	۰

پھر لَ کو حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ ب، ج، د صفر بنائے گئے ہیں تو ا کا سر صر بچا

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ہوگا۔ اسی طرح ب کا سر ب کے صغیر متمم مقطع میں اَ ج ، د
کی بجائے صفر رکھنے سے حاصل ہوتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس ۔

(20) پھر لہ کو معلوم کرنیکے لئے فرض کرو کہ ج اور د کو صفر بنایا گیا ہے تو اب کا سر حاصل شدہ مقطع کا دوسرا صغیر مقطع

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{د}_3 \\ \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ہوگا۔ کسی اور حاصل ضرب کا سر اسی طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔ آخر الامر
∆ کا پھیلاؤ اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\text{ا}\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{ب}\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_3 & 0 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{ج}\begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{د}\begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\text{اب}\begin{vmatrix} 0 & \text{د}_3 \\ \text{ج}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{اج}\begin{vmatrix} 0 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_4 & 0 \end{vmatrix} +\text{اد}\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & 0 \end{vmatrix} +\text{بج}\begin{vmatrix} 0 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\text{بد}\begin{vmatrix} 0 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_3 & 0 \end{vmatrix} +\text{جد}\begin{vmatrix} 0 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & 0 \end{vmatrix} +\text{ابجد}$$

وہ مقطع جس کے صدر عناصر سب کے سب معدوم ہوتے ہیں صفروتری کہلاتا ہے۔ متذکرۂ صدر نتیجہ کو اب ہم یوں بیان کر سکتے ہیں:۔
کسی مقطع کو صدر عناصر کے حاصل ضربوں میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ پھیلاؤ میں ہر حاصل ضرب کا ہم ضربی صفروتری مقطع ہوتا ہے

۱۳۷۔ **مقطع کا پھیلاؤ ایک صف اور ایک ستون کے عناصر کے زوجوں کے حاصل ضربوں میں۔**

ذیل میں ہم پہلی صف اور پہلے ستون کو لیتے ہیں اور ان کے رقوم میں پھیلاؤ معلوم کرتے ہیں۔ یہ صریحًا کافی ہے کیونکہ کوئی صف اور کوئی ستون ان محلوں میں ہٹاؤں کی مدد سے لائے جا سکتے ہیں
مقطع کو شکل

اَ	عہ	بہ	جہ	..
عہَ	ا۱	ب۱	ج۱	..
بہَ	ا۲	ب۲	ج۲	..
جہَ	ا۳	ب۳	ج۳	..
	..	..	..	..

میں لکھنے سے آسانی پیدا ہوتی ہے۔
فرض کرو کہ اس کو △َ سے تعبیر کیا گیا ہے اور اسکا پہلا صدر (21
صغیر مقطع (ا۱ ب۲ ج۳ ....) حسب معمول △ سے تعبیر ہوتا ہے
اس مقطع △َ کو △ سے اس کو حاشیہ لگا کر اخذ کر سکتے ہیں چنانچہ △ کو اَ، عہ، بہ، جہ .... عناصر کا افقاً اور اَ، عہَ، بہَ، جہَ، .... عناصر کا انتصاباً حاشیہ لگانے سے مقطع △َ حاصل ہو جاتا ہے۔

جب Δ کو پھیلایا جاتا ہے تو وہ سب رقمیں جنمیں $\text{ا}_۱$ آتا ہے Δ میں شامل ہیں۔ علاوہ ازیں پھیلاؤ میں ستون اول کے ہر دیگر عنصر اور صف اول کے ہر دیگر عنصر کا حاصل ضرب شامل ہوگا جبکہ دو عناصر کے ہر ایسے حاصل ضرب کو اس کے مناسب جزو ضربی سے ضرب دیدیا جائے۔ کسی حاصل ضرب کے لئے یہ جزو ضربی آسانی کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ Δ کے پھیلاؤ ہیں $\text{ا}_۱$ $\text{ب}_۱$ $\text{ج}_۱$ ...... $\text{ا}_۲$ $\text{ب}_۲$ ...... وغیرہ کے

ہم ضربی دفعہ ۱۳۴ کی ترقیم کی بموجب $\text{ا}_۱$ $\text{ب}_۱$ ... $\text{ا}_۲$ $\text{ب}_۲$ ... وغیرہ ہیں۔ یہ واضح رہے کہ وہ جزو ضربی جو کسی حاصل ضرب کے ساتھ آتا ہے (مثلاً Δ کے پھیلاؤ میں عہ عہ کے ساتھ) وہی ہے جو $\text{ا}_۱$ کے ساتھ بہ تبدیل علامت آتا ہے یعنے۔ $\text{ا}_۱$۔ اسی طرح وہ جزو ضربی جو عہ بہ کے ساتھ آتا ہے وہی ہے جو $\text{ب}_۱$ کے ساتھ بہ تبدیل علامت آتا ہے یعنے۔ $\text{ب}_۱$۔ اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس قسم کے حاصل ضرب کے ساتھ جو جزو ضربی موجود ہوتا ہے اسکو حاصل کرنیکا قاعدہ صاف طور پر یہ ہے:۔ صدر رقم $\text{ا}_۱$ اور اُن دو اجزائے ترکیبی سے جو حاصل ضرب میں داخل ہوتے ہیں بننے والے مستطیل کو مکمل کر کے چوتھا جزو ترکیبی معلوم کرو تو مطلوبہ جزو ضربی Δ کے اس طور پر حاصل کردہ جزو ترکیبی کی بجائے متناظر بڑا حرف منفی علامت کے ساتھ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے آخر الامر یہ معلوم ہوتا ہے کہ Δ کا پھیلاؤ شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:۔

$$\Delta' \equiv \text{ا}_1 \Delta - \text{ا}_1\, \text{عہ}\, \text{عہ}' - \text{ب}_1\, \text{بہ}\, \text{عہ}' - \text{ج}_1\, \text{جہ}\, \text{عہ}' - \ldots\ldots$$
$$- \text{ا}_2\, \text{عہ}\, \text{بہ}' - \text{ب}_2\, \text{بہ}\, \text{بہ}' - \text{ج}_2\, \text{جہ}\, \text{بہ}' - \ldots\ldots$$
$$- \text{ا}_3\, \text{عہ}\, \text{جہ}' - \text{ب}_3\, \text{بہ}\, \text{جہ}' - \text{ج}_3\, \text{جہ}\, \text{جہ}' - \ldots\ldots$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

پھیلاؤ کے اس طریقہ کا فائدہ کسی آئندہ دفعہ میں مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جائیگا۔

۱۳۸ ــ مقطعات کی جمع ۔ مسئلہ ۵۔ اگر کسی خط کے ہر عنصر کو دو عناصر کے مجموعہ میں تحلیل کیا جا سکے تو مقطع کو دوسرے دو مقطعوں کے مجموعہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ سُتُونِ اول کے عناصر $\text{ا}_1 + \text{عہ}_1$، $\text{ا}_2 + \text{عہ}_2$، $\text{ا}_3 + \text{عہ}_3$ وغیرہ ہیں۔ دفعہ ۱۳۴ کے پھیلاؤ میں اِن کو درج کرنے سے

$$\Delta = (\text{ا}_1 + \text{عہ}_1)\,\text{ا}_1 + (\text{ا}_2 + \text{عہ}_2)\,\text{ا}_2 + (\text{ا}_3 + \text{عہ}_3)\,\text{ا}_3 + \ldots\ldots$$
$$= \text{ا}_1\text{ا}_1 + \text{ا}_2\text{ا}_2 + \text{ا}_3\text{ا}_3 + \ldots + \text{عہ}_1\text{ا}_1 + \text{عہ}_2\text{ا}_2 + \text{عہ}_3\text{ا}_3 + \ldots$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 + \text{عہ}_1 , & \text{ب}_1 , & \text{ج}_1 & \ldots \\ \text{ا}_2 + \text{عہ}_2 , & \text{ب}_2 , & \text{ج}_2 & \ldots \\ \text{ا}_3 + \text{عہ}_3 , & \text{ب}_3 , & \text{ج}_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \cdot \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \cdot \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{عہ}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \cdot \\ \text{عہ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \cdot \\ \text{عہ}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \end{vmatrix}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اگر کسی اور سُتُون کے عناصر دو دو عناصر کے مجموعوں میں تحلیل ہو سکیں تو پہلے ایک سُتُون کے لحاظ سے تحلیل کرنے سے اور

بعد میں اِس دوسرے ستون کے لحاظ سے تحلیل کرنے سے یہ آسانی کے ساتھ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ مقطع کو چار دوسرے چار مقطعوں کے مجموعہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً مقطع

$$\begin{vmatrix} ا_1 + عہ_1 & ب_1 + بہ_1 & ج_1 \\ ا_2 + عہ_2 & ب_2 + بہ_2 & ج_2 \\ ا_3 + عہ_3 & ب_3 + بہ_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

دفعہ ۱۳۳ کی ترقیم کی بموجب اِن چار مقطعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے

$$(ا_1 ب_2 ج_3) + (عہ_1 ب_2 ج_3) + (عہ_1 بہ_2 ج_3) + (ا_1 بہ_2 ج_3)$$

اسی طرح یہ نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ اگر ایک ستون کا ہر عنصر رقموں کی کسی تعداد کے جبری مجموعہ میں تحلیل ہو سکے تو مقطع کو دوسرے مقطعوں کی متناظر تعداد میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

مثلاً

$$\begin{vmatrix} ا_1 - عہ_1 + عہَ_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 - عہ_2 + عہَ_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 - عہ_3 + عہَ_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} عہ_1 & ب_1 & ج_1 \\ عہ_2 & ب_2 & ج_2 \\ عہ_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} عہَ_1 & ب_1 & ج_1 \\ عہَ_2 & ب_2 & ج_2 \\ عہَ_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

(23) اور عام صورت میں اگر ایک ستون دوسرے م ستونوں کا جبری مجموعہ ہو کوئی دوسرا ستون دوسرے ن ستونوں کا مجموعہ ہو، کوئی تیسرا ستون دوسرے ف ستونوں کا مجموعہ ہو، وغیرہ تو مقطع کو دوسرے مقطعوں کی تعداد م ن ف . . . . وغیرہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

اب یہ ظاہر ہے کہ ایسے ہی نتیجے صفوں کے لحاظ سے صادق آتے ہیں کیونکہ اِن کو ثبوت بالا میں ستونوں کی بجائے مندرج کیا جا سکتا ہے

۱۳۹ - مسئلہ ۶ - اگر ایک خط کے عناصر باقی دوسرے خطوں کے متناظر عناصر کے (جنکو مستقل اجزائے ضربی سے ضرب دیا گیا ہو) مجموعوں کے مساوی ہوں تو مقطع معدوم ہو جاتا ہے -

کیونکہ ایسی صورت میں اس مقطع کو ایسے مقطعوں کے مجموعہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جنمیں سے ہر ایک جداگانہ طور پر معدوم ہوتا ہے - مثلاً

$$\begin{vmatrix} \text{م}\,\text{ا}_1 + \text{ن}\,\text{ب}_1 & \text{ا}'_1 & \text{ب}'_1 \\ \text{م}\,\text{ا}_2 + \text{ن}\,\text{ب}_2 & \text{ا}'_2 & \text{ب}'_2 \\ \text{م}\,\text{ا}_3 + \text{ن}\,\text{ب}_3 & \text{ا}'_3 & \text{ب}'_3 \end{vmatrix} = \text{م}\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}'_1 & \text{ب}'_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}'_2 & \text{ب}'_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ا}'_3 & \text{ب}'_3 \end{vmatrix} + \text{ن}\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ا}'_1 & \text{ب}'_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ا}'_2 & \text{ب}'_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ا}'_3 & \text{ب}'_3 \end{vmatrix}$$

اور بائیں طرف کا ہر مقطع معدوم ہوتا ہے (دفعہ ۱۳۰)-

۱۴۰ - مسئلہ ۷ - اگر کسی ستون یا صف کے ہر عنصر میں باقی دوسرے ستونوں یا صفوں کے متناظر عناصر مستقل اجزائے ضربی سے علی الترتیب ضرب دینے کے بعد جمع کر دئے جائیں تو مقطع کی قیمت نہیں بدلتی -

کیونکہ جب مقطع کو دوسرے مقطعوں کے مجموعہ میں دفعہ ۱۳۸ کی طرح تحلیل کیا جاتا ہے تو وہ مقطعات جنمیں جمع کردہ خطوط واقع ہوتے ہیں معدوم ہو جاتے ہیں کیونکہ ان میں سے ہر ایک مستقل جزو ضربی کو جدا کرنیکے بعد، دو متماثل خطوط رکھتا ہے -

مثلاً

ا۱	ب۱	ج۱	≡	ا۱ + م ب۱ + ن ج۱	ب۱	ج۱
ا۲	ب۲	ج۲		ا۲ + م ب۲ + ن ج۲	ب۲	ج۲
ا۳	ب۳	ج۳		ا۳ + م ب۳ + ن ج۳	ب۳	ج۳

کیونکہ جب دوسرے مقطع کو تین دیگر مقطعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے تو وہ مقطعات جو جمع کردہ ستونوں سے پیدا ہوتے ہیں متماثلاً معدوم ہو جاتے ہیں (دفعہ ۱۳۹)۔

اس دفعہ کا مسئلہ مقطعوں کی قیمت معلوم کرنے میں عملاً بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

(24)

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ حسب ذیل مقطع معدوم ہوتا ہے:-

بہ + جہ	عہ	۱
جہ + عہ	بہ	۱
عہ + بہ	جہ	۱

دوسرے ستون کے عناصر کو پہلے ستون کے متناظر عناصر میں جمع کر کے ہم عہ + بہ + جہ کو ایک جزو ضربی کے طور پر باہر نکال سکتے ہیں اور پھر دو ستون متماثل ہو جاتے ہیں۔

۲۔ ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو:-

۱	۲	۴
۲	۳	۷
۳	۴	۱۰

ستونِ اول کے عناصر کو ستون دوم کے عناصر میں سے تفریق کرنے اور ستونِ اول کے عناصر کو ۳ سے ضرب دیکر اِن کو ستون سوم میں سے

تفریق کرنے سے ہمیں مقطع

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتا ہے جو تماثلاً معدوم ہو جاتا ہے۔

۳ —

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

یہاں پہلا استحالہ صفِ اول کے عناصر کو یکے بعد دیگرے دوسری، تیسری، چوتھی صفوں کے عناصر کے ساتھ جمع کرنے سے حاصل کیا گیا۔

۴ —

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & -10 & -10 \\ 13 & -24 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 24 & 16 \end{vmatrix} = 30(16-24) = -240$$

یہاں دوسرا استحالہ ستونِ اول کو ۳ سے ضرب دیکر اسکو ستونِ دوم میں سے تفریق کرنے اور ستونِ اول کے دوچند کو ستونِ سوم میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوا۔ اس قسم کی مثالوں میں اس بات کی کوشش ہونی چاہیے کہ کسی صف یا ستون کے تمام عنصروں کو سوائے ایک عنصر کے صفر میں تحویل کیا جائے کیونکہ اس عمل سے دیا ہوا مقطع نچلے رتبہ کے مقطع میں تحویل ہو جاتا ہے اور اس لئے اسکی قیمت معلوم کرنے میں آسانی پیدا ہو جاتی ہے۔ یہ بات کسی خط کو اکائیوں میں تحویل کرنے سے (25
ہمیشہ عمل میں آسکیگی جیسے مثال ۷، دفعہ ۱۳۲ کی صورت میں۔ لیکن عام طور پر صرف جمع یا تفریق کے عمل سے مثال بالا کی طرح اس قسم کی

آسانی پیدا ہو سکتی ہے۔

۵۔

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ 19 & 0 & -2 & 17 \\ -7 & 0 & 5 & -2 \\ 12 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 19 & -2 & 17 \\ -7 & 5 & -2 \\ 12 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

صفِ اول کے دو چند کو صفِ دوم میں جمع کرو، صف اول کو صف سوم میں سے تفریق کرو، اور صف اول کو صف چہارم میں جمع کرو تو دوسرا استحالہ حاصل ہو جائیگا۔ تحویل شدہ مقطع میں ستون دوم کا چار گنا ستون اول میں سے اور ستون دوم کا تین گنا ستون سوم میں سے تفریق کرو تو اس مقطع کو آسانی کے ساتھ محسوب کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$2\begin{vmatrix} 19 & -2 & 17 \\ -7 & 5 & -2 \\ 12 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 27 & -2 & 23 \\ -27 & 5 & -17 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 27 & 23 \\ -27 & -17 \end{vmatrix} = -972$$

۶۔ ذیل کا مقطع محسوب کرو:—

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

اِس مقطع میں پہلے سولہ طبعی اعداد کو ایک ایسے مربع میں ترتیب دیا گیا ہے جسکو ہم "طلسمی مربع" کہہ سکتے ہیں کیونکہ کسی صف یا کسی ستون کے اعداد کا مجموعہ مستقل (۳۴) ہے۔ عام صورت میں پہلے $ن^2$ طبعی اعداد کے مربع کے لئے یہ مجموعہ $\frac{1}{2}ن(ن^2+1)$ ہوگا۔ ایسے مقطعوں کو بقدر ایک درجہ کے فوراً گھٹایا جا سکتا ہے۔ مندرجۂ بالا مقطع میں آخری تین ستونوں کو پہلے ستون میں جمع کرنے اور آخری صف کو باقی ہر صف میں سے تفریق کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\Delta = 34\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 34\begin{vmatrix} 0 & 12 & 12 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & 9 & -11 \\ 1 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= -34 \times 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -7 \\ 7 & 9 & -11 \end{vmatrix}$$

اور دوسری صف کو آخری صف میں سے تفریق کرنے پر یہ ظاہر ہے کہ محول مقطع معدوم ہوجاتا ہے۔پس $\Delta = 0$

۷ ۔ پہلے نو طبعی اعداد کو طلسمی مربع میں ترتیب دیکر مقطع بنایا گیا ہے ۔ اسکو محسوب کرو :۔

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

جواب :- ۳٦۰

۸ ۔ پہلے پچیس طبعی اعداد کو طلسمی مربع میں ترتیب دیکر مقطع بنایا گیا ہے ۔ اِسکی قیمت معلوم کرو :۔ (26

$$\begin{vmatrix} 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix}$$

جواب :- - ۴٦۸۰۰۰۰

۹ ۔ مثال ۹ دفعہ ۱۳۴ کا مقطع دفعہ بالا کے طریقہ سے محسوب کرو :۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{۱} & \text{۱} & \text{۱} & \text{۰} \\ \text{ما}^2 & \text{ی}^2 & \text{۰} & \text{۱} \\ \text{لا}^2 & \text{۰} & \text{ی}^2 & \text{۱} \\ \text{۰} & \text{لا}^2 & \text{ما}^2 & \text{۱} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{۰} & \text{۰} & \text{۱} & \text{۰} \\ \text{ما}^2 & \text{ی}^2 & \text{۰} & \text{۱} \\ \text{لا}^2-\text{ی}^2 & -\text{ی}^2 & \text{ی}^2 & \text{۱} \\ -\text{ما}^2 & \text{لا}^2-\text{ما}^2 & \text{ما}^2 & \text{۱} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ما}^2 & \text{ی}^2 & \text{۱} \\ \text{لا}^2-\text{ی}^2 & -\text{ی}^2 & \text{۱} \\ -\text{ما}^2 & \text{لا}^2-\text{ما}^2 & \text{۱} \end{vmatrix}$$

یہاں ہم دوسرا مقطع حاصل کرنے کے لئے دوسرے ستون کو اسکے بعد کے ستونوں میں سے تفریق کرتے ہیں۔ تحویل شدہ مقطع میں پہلی صف کو باقی دوسری صفوں میں سے تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = - \begin{vmatrix} \text{ما}^2 & \text{ی}^2 & \text{۱} \\ \text{لا}^2-\text{ی}^2-\text{ما}^2 & -\text{۲}\,\text{ی}^2 & \text{۰} \\ -\text{۲}\,\text{ما}^2 & \text{لا}^2-\text{ما}^2-\text{ی}^2 & \text{۰} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2 & \text{۲}\,\text{ی}^2 \\ \text{۲}\,\text{ما}^2 & \text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2)^2 - \text{۴}\,\text{ما}^2\,\text{ی}^2$$

$$= (\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2-\text{۲}\,\text{ما ی})(\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{لا}^2+\text{۲}\,\text{ما ی})$$

$$= \left\{(\text{ما}-\text{ی})^2-\text{لا}^2\right\}\left\{(\text{ما}+\text{ی})^2-\text{لا}^2\right\}$$

$$= -(\text{لا}+\text{ما}+\text{ی})(\text{ما}+\text{ی}-\text{لا})(\text{ی}+\text{لا}-\text{ما})(\text{لا}+\text{ما}-\text{ی})$$

۱۰۔ متماثلہ ذیل ثابت کرو:۔

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}^2 & \text{ا}^2 & (\text{ب}+\text{ج})^2 \\ \text{ب}^2 & (\text{ج}+\text{ا})^2 & \text{ب}^2 \\ (\text{ا}+\text{ب})^2 & \text{ج}^2 & \text{ج}^2 \end{vmatrix} \equiv \text{۲}\,\text{ا ب ج}\,(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^3$$

آخری ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کر کے $(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2$ کو جزو ضربی کے طور پر باہر نکالا جا سکتا ہے۔ باقی مقطع کو Δ' سے تعبیر کرکے اور اس میں پہلی دو صفوں کے مجموعہ کو آخری صف سے تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہو گا

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \text{ب + ج - ا} & \text{۰} & \text{ا}^2 \\ \text{۰} & \text{ج + ا - ب} & \text{ب}^2 \\ \text{ج - ا - ب} & \text{ج - ا - ب} & (\text{ا + ب})^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب + ج - ا} & \text{۰} & \text{ا}^2 \\ \text{۰} & \text{ج + ا - ب} & \text{ب}^2 \\ \text{- ۲ ب} & \text{- ۲ ا} & \text{۲ اب} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\text{اب}} \begin{vmatrix} \text{ا (ب + ج - ا)} & \text{۰} & \text{ا}^2 \\ \text{۰} & \text{ب (ج + ا - ب)} & \text{ب}^2 \\ \text{- ۲ اب} & \text{- ۲ اب} & \text{۲ اب} \end{vmatrix}$$

آخری ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں جمع کرنے سے ہمیں (27
حاصل ہوگا

$$\Delta' = \frac{1}{\text{اب}} \begin{vmatrix} \text{ا (ب + ج)} & \text{ا}^2 & \text{ا}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{ب (ج + ا)} & \text{ب}^2 \\ & \text{۰} & \text{۲ اب} \end{vmatrix} = ۲ \begin{vmatrix} \text{ا (ب + ج)} & \text{ا}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{ب (ج + ا)} \end{vmatrix}$$

$$= \text{۲ اب} \begin{vmatrix} (\text{ب + ج}) & \text{ا} \\ \text{ب} & (\text{ج + ا}) \end{vmatrix} = \text{۲ اب ج} \; (\text{ا + ب + ج})$$

پس $\Delta = \Delta' (\text{ا + ب + ج})^2 = \text{۲ اب ج} \; (\text{ا + ب + ج})^3$

۱۱۔ متماثلہ ذیل ثابت کرو:۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ}^3 & \text{بہ}^3 & \text{جہ}^3 \end{vmatrix} \equiv (\text{بہ - جہ})(\text{جہ - عہ})(\text{عہ - بہ})(\text{عہ + بہ + جہ})$$

پہلے ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کرو تو بہ - عہ اور جہ - عہ اجزائے ضربی ہو جائینگے۔ پھر تحویل شدہ مقطع میں پہلی صف کو عہ^2 سے ضرب دیکر دوسری صف سے تفریق کرو۔

۱۲۔ مقطع

Δ ≡

۱	۱	۱	۱
عہ	بہ	جہ	ضہ
عہ^{2}	بہ^{2}	جہ^{2}	ضہ^{2}
عہ^{4}	بہ^{4}	جہ^{4}	ضہ^{4}

کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

مثال ۱۱ کی طرح عمل کرنے سے آسانی کے ساتھ معلوم ہو جائیگا کہ (بہ - عہ) (جہ - عہ) (ضہ - عہ) جزو ضربی ہے اور تحویل شدہ مقطع ہے

۱	۱	۱
بہ + عہ	جہ + عہ	ضہ + عہ
بہ^{3} + بہ^{2} عہ + بہ عہ^{2} + عہ^{3}	جہ^{3} + جہ^{2} عہ + جہ عہ^{2} + عہ^{3}	ضہ^{3} + ضہ^{2} عہ + ضہ عہ^{2} + عہ^{3}

پہلے ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کرو تو (جہ - بہ) (ضہ - بہ) جزو ضربی کے طور پر نکل آئیگا اور باقی جزو ضربی کا (ضہ - جہ) (عہ + بہ + جہ + ضہ) ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہو جائیگا۔ پس بالآخر

Δ ≡ - (بہ - جہ) (عہ - ضہ) (جہ - عہ) (بہ - ضہ) (عہ - بہ) (جہ - ضہ) (عہ + بہ + جہ + ضہ)

۱۳ ـ مقطع

Δ ≡

ا	ب	ج
ج	ا	ب
ب	ج	ا

کو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

دوسرے ستون کو سہ سے اور تیسرے ستون کو سہ^{2} سے ضرب دو اور پہلا ستون دونوں میں جمع کرو۔ جزو ضربی ا + سہ ب + سہ^{2} ج پہلے ستون سے نکل آئیگا (کیونکہ سہ^{3} = ۱) اور عناصر ا، سہ، سہ^{2} بچ جائینگے۔ پھر دوسری اور تیسری صفوں کو پہلی صف میں جمع کرنے سے جزو ضربی ا + ب + ج باہر نکالا جا سکتا ہے اور بقیہ مقطع کا ا + سہ^{2} ب + سہ ج کے مساوی ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے۔ پس

$$\Delta \equiv (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ا} + \text{س}\,\text{ب} + \text{س}^2\,\text{ج})(\text{ا} + \text{س}^2\,\text{ب} + \text{س}\,\text{ج})$$

۱۴ ـ مقطع (28)

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{د} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{د} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix}$$

کو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔
نتیجہ ہوگا

$$\Delta = -(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د})(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا} - \text{د})(\text{ج} + \text{ا} - \text{ب} - \text{د})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{د})$$

کیونکہ مندرجہ بالا ہر جزو ضربی مقطع کا ایک جزو ضربی ہے۔ مثلاً پہلے ستون میں دوسرا ستون جمع کرنے اور تیسرے اور چوتھے ستونوں کو تفریق کرنے سے یہ بتایا جا سکتا ہے کہ مقطع کا ایک جزو ضربی ا + ب - ج - د ہے۔ ا^4 کی علامت کا مقابلہ کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل ضرب کی علامت منفی ہونی چاہیئے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مثال ۹ کا مقطع مندرجہ بالا مقطع کی مخصوص صورت ہے کیونکہ ا = ۰ رکھنے سے یہ مقطع حاصل ہو جاتا ہے چنانچہ مثال ۹ دفعہ ۱۳۴ کی متماثلہ اشکال کا مقابلہ کرنے سے یہ بات واضح ہے۔

۱۴۱ ـ مقطعات کی ضرب ـ مسئلہ ۸ ـ کسی رتبہ کے دو مقطعوں کا حاصل ضرب اُسی رتبہ کا ایک مقطع ہوتا ہے۔

ہم یہ مسئلہ تیسرے رتبہ کے دو مقطعوں کے لئے ثابت کرینگے۔ طالب علم کو ثبوت کی نوعیت سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ عام صورت میں بھی اُسی طرح اطلاق پذیر ہے۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ دو مقطعوں $(\text{ا}_1\ \text{ب}_2\ \text{ج}_3)$ اور $(\text{ع}_1\ \text{ح}_2\ \text{ی}_3)$ کا حاصل ضرب ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{عہ}_1+\text{ب}_1\text{بہ}_1+\text{ج}_1\text{جہ}_1 & \text{ا}_1\text{عہ}_2+\text{ب}_1\text{بہ}_2+\text{ج}_1\text{جہ}_2 & \text{ا}_1\text{عہ}_3+\text{ب}_1\text{بہ}_3+\text{ج}_1\text{جہ}_3 \\ \text{ا}_2\text{عہ}_1+\text{ب}_2\text{بہ}_1+\text{ج}_2\text{جہ}_1 & \text{ا}_2\text{عہ}_2+\text{ب}_2\text{بہ}_2+\text{ج}_2\text{جہ}_2 & \text{ا}_2\text{عہ}_3+\text{ب}_2\text{بہ}_3+\text{ج}_2\text{جہ}_3 \\ \text{ا}_3\text{عہ}_1+\text{ب}_3\text{بہ}_1+\text{ج}_3\text{جہ}_1 & \text{ا}_3\text{عہ}_2+\text{ب}_3\text{بہ}_2+\text{ج}_3\text{جہ}_2 & \text{ا}_3\text{عہ}_3+\text{ب}_3\text{بہ}_3+\text{ج}_3\text{جہ}_3 \end{vmatrix}$$

جس کے عناصر مقطع ($\text{ا}_1\ \text{ب}_2\ \text{ج}_3$) کی کسی صف کے عناصر کو مقطع ($\text{عہ}_1\ \text{بہ}_2\ \text{جہ}_3$) کی کسی صف کے متناظر عناصر سے ضرب دینے سے جو حاصل ضرب ملتے ہیں اُن کے مجموعے ہیں -

اب چونکہ ہر ستون تین رقموں پر مشتمل ہے یہ مقطع دوسرے ستائیس مقطعوں کے مجموعہ میں پھیلایا جا سکتا ہے (دفعہ ۱۳۸)۔ اب یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ جب ان میں سے کسی ایک کو لکھ لیا جاتا ہے تو ہر ستون سے ایک مشترک جزو ضربی نکل سکتا ہے اور یہ کہ جزوی مقطعات میں سے چند ایسے مقطع بھی ہیں کہ مشترک اجزائے ضربی کو علیحدہ کر دینے کے بعد انہیں دو (یا زیادہ) ستون متماثل ہو جاتے ہیں ۔ جو مقطعات اس طور پر معدوم نہیں ہوتے اِن کو آسانی کے ساتھ چن لیا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر ہم پہلے ستون سے پہلا انتصابی خط لیں اور اس کے ساتھ دوسرے ستون سے پہلا خط تو ہمیں معدوم ہونیوالا مقطع ملیگا۔ اس لئے ہمیں دوسرے ستون سے دوسرا خط اور اس کے ساتھ تیسرے ستون سے تیسرا خط لینا ہوگا تاکہ وہ مقطع حاصل ہو جو معدوم نہیں ہوتا۔ پہلے ستون کے پہلے خط کو دوسرے ستون کے تیسرے خط اور تیسرے ستون کے دوسرے خط کے ساتھ لینے سے بھی معدوم نہ ہونیوالا مقطع حاصل ہوگا۔ ستونوں کے مشترک اجزائے ضربی کو باہر نکال لینے سے اِن دو مقطعوں کو یوں لکھا جا سکتا ہے :- (29)

$$\text{عہ}_1\text{بہ}_2\text{جہ}_3 \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{عہ}_1\text{جہ}_2\text{بہ}_3 \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ج}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ج}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ج}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

اسی طرح باری باری سے پہلے ستون کے باقی دوسرے خطوں کو لینے سے ہم چار اور مقطعے حاصل کرتے ہیں جو معدوم نہیں ہوتے پس کل چھ ارقام ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ اِنمیں سے ہر ایک میں ($ا_1 ب_2 ج_3$) ایک جزو ضربی ہے۔ اِس جزو ضربی کو باہر نکالنے سے اِن چھ رقموں کا مجموعہ باقی رہتا ہے:۔

$$ع_1 ب_2 ج_3 - ع_1 ب_3 ج_2 - ع_2 ب_1 ج_3 + ع_3 ب_1 ج_2 + ع_2 ب_3 ج_1 - ع_3 ب_2 ج_1$$

اور یہ مقطع ($ع_1 ب_2 ج_3$) ہے۔ اسلئے ہم نے ثابت کر دیا کہ مندرجہ بالا مقطع دو دئے ہوئے مقطعوں کا حاصل ضرب ہے۔

دئے ہوئے مقطعوں میں سے کسی میں ستونوں کی بجائے صفوں کو لکھا جا سکتا ہے۔ اس لئے حاصل ضرب کو متعدد مختلف شکلوں میں مقطع کے طور پر لکھا جا سکتا ہے لیکن ظاہر ہے کہ اِن کو پھیلانے سے وہی قیمت حاصل ہوگی۔

۱۴۲ ۔ مقطعوں کا حاصل ضرب (مسلسل) ۔ لاپلاس کے پھیلاؤ کے طریقہ سے جسکی تشریح دفعہ ۱۳۵ میں ہو چکی ہے دفعہ گذشتہ کے مسئلہ کے ثبوت کا ایک اور طریقہ ملتا ہے جس میں ایک ہی رتبہ کے دو دئے ہوئے مقطعوں کا حاصل ضرب ایک مقطع کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

اس ثبوت کی نوعیت کافی طور پر ذیل کے تیسرے رتبہ کے دو مقطعوں پر استعمال کرنے سے واضح ہو جائیگی۔

دو مقطعوں ($ا_1 ب_2 ج_3$) اور ($ع_1 ب_2 ج_3$) کا حاصل ضرب صریحاً

مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \text{عہ}_1 & \text{عہ}_2 & \text{عہ}_3 \\ 0 & -1 & 0 & \text{بہ}_1 & \text{بہ}_2 & \text{بہ}_3 \\ 0 & 0 & -1 & \text{جہ}_1 & \text{جہ}_2 & \text{جہ}_3 \end{vmatrix}$$

کے مساوی ہے (مثال ۳ دفعہ ۱۳۵)۔

اس مقطع میں پہلے ستون کو عہ$_1$ سے، دوسرے کو بہ$_1$ سے، تیسرے کو جہ$_1$ سے ضرب دیکران کے مجموعہ کو چوتھے ستون میں جمع کرو۔ پھر پہلے ستون کو عہ$_2$ سے، دوسرے کو بہ$_2$ سے، تیسرے کو جہ$_2$ سے ضرب دیکران کے مجموعہ کو پانچویں ستون میں جمع کرو۔ پھر پہلے ستون کو عہ$_3$ سے، دوسرے کو بہ$_3$ سے، تیسرے کو جہ$_3$ سے ضرب دیکران کے مجموعہ کو چھٹے ستون میں جمع کرو۔ تب مقطع ہوجاتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{ا}_1\text{عہ}_1+\text{ب}_1\text{بہ}_1+\text{ج}_1\text{جہ}_1 & \text{ا}_1\text{عہ}_2+\text{ب}_1\text{بہ}_2+\text{ج}_1\text{جہ}_2 & \text{ا}_1\text{عہ}_3+\text{ب}_1\text{بہ}_3+\text{ج}_1\text{جہ}_3 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{ا}_2\text{عہ}_1+\text{ب}_2\text{بہ}_1+\text{ج}_2\text{جہ}_1 & \text{ا}_2\text{عہ}_2+\text{ب}_2\text{بہ}_2+\text{ج}_2\text{جہ}_2 & \text{ا}_2\text{عہ}_3+\text{ب}_2\text{بہ}_3+\text{ج}_2\text{جہ}_3 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{ا}_3\text{عہ}_1+\text{ب}_3\text{بہ}_1+\text{ج}_3\text{جہ}_1 & \text{ا}_3\text{عہ}_2+\text{ب}_3\text{بہ}_2+\text{ج}_3\text{جہ}_2 & \text{ا}_3\text{عہ}_3+\text{ب}_3\text{بہ}_3+\text{ج}_3\text{جہ}_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

اور یہ مقطع، مقطع

$$\begin{vmatrix} -\text{۱} & \text{۰} & \text{۰} \\ \text{۰} & -\text{۱} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۰} & -\text{۱} \end{vmatrix}$$ (جو -۱ کے مساوی ہے)

اور متمم صغیر مقطع کے حاصل ضرب (ٹھیک علامت کے ساتھ) کے مساوی ہے اور یہ حاصل ضرب وہی مقطع ہے جو دفعہ ماسبق میں حاصل ہوا تھا۔ اب یہ امر کہ حاصل ضرب کی علامت منفی ہونی چاہیئے اس طرح واضح ہے کہ پہلی تین صفوں کو نیچے یہاں تک حرکت دینی پڑتی ہے کہ زیر بحث دو صغیر مقطعوں کے وتر خود مقطع کا وتر بن جائیں۔ طالب علم کو یہ دیکھنے میں کوئی مشکل پیش نہیں آئیگی کہ عام صورت میں اس قسم کے ہٹاؤں کی تعداد طاق ہے اگر دئے ہوئے مقطعوں کا رتبہ طاق ہو اور جفت ہے اگر مقطعوں کا رتبہ جفت ہو۔ پس دفعہ ۱۴۱ کے حاصل ضربی مقطع کی علامت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے۔

اس دفعہ اور دفعہ گذشتہ کا اہم مسئلہ مندرجہ ذیل مثالوں سے بخوبی واضح ہو جائیگا۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ دو مقطعوں

$$\begin{vmatrix} \text{ا} + \text{خ}\,\text{ب} & \text{ج} + \text{خ}\,\text{د} \\ -\text{ج} + \text{خ}\,\text{د} & \text{ا} - \text{خ}\,\text{ب} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \text{اَ} - \text{خ}\,\text{بَ} & \text{جَ} - \text{خ}\,\text{دَ} \\ -\text{جَ} - \text{خ}\,\text{دَ} & \text{اَ} + \text{خ}\,\text{بَ} \end{vmatrix}$$

کا حاصل ضرب (جہاں $\text{خ} = \sqrt{-1}$) شکل

$$\begin{vmatrix} \text{د} - \text{خ}\,\text{ج} & \text{ب} - \text{خ}\,\text{ا} \\ -\text{ب} - \text{خ}\,\text{ا} & \text{د} + \text{خ}\,\text{ج} \end{vmatrix}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں

اَ ≡ ب جَ - بَ ج + ا دَ - اَ د ، بَ ≡ ج اَ - جَ ا + ب دَ - بَ د ،

جَ ≡ ا بَ - اَ ب + ج دَ - جَ د ، Δ ≡ ا اَ + ب بَ + ج جَ + د دَ ،

اور پھر یولر کا یہ مسئلہ ثابت کرو :-

(ا^٢ + ب^٢ + ج^٢ + د^٢) (اَ^٢ + بَ^٢ + جَ^٢ + دَ^٢)

≡ (ا اَ + ب بَ + ج جَ + د دَ)^٢ + (ب جَ - بَ ج + ا دَ - اَ د)^٢

+ (ج اَ - جَ ا + ب دَ - بَ د)^٢ + (ا بَ - اَ ب + ج دَ - جَ د)^٢

یعنی دو مجموعوں کا حاصل ضرب جنمیں سے ہر ایک چار مربعوں کا مجموعہ ہے چار مربعوں کے مجموعہ کے طور پہ بیان کیا جا سکتا ہے -

۲ - تیسرے رتبہ کے مقطع کے مربع کے لئے حسب ذیل جملہ ثابت کرو:

٢ ×

ا	ب	ج
اَ	بَ	جَ
اً	بً	جً

^٢ =

٢(اج - ب^٢)	اجَ + اَج - ٢ب بَ	اجً + اًج - ٢ب بً
اجَ + اَج - ٢ب بَ	٢(اَجَ - بَ^٢)	اَجً + اًجَ - ٢بَ بً
اجً + اًج - ٢ب بً	اَجً + اًجَ - ٢بَ بً	٢(اًجً - بً^٢)

یہ ثابت ہو جاتا ہے اگر ہم دو مقطعوں

ا	ب	ج
اَ	بَ	جَ
اً	بً	جً

،

ج	-٢ب	ا
جَ	-٢بَ	اَ
جً	-٢بً	اً

کو ضرب دیں جو صرف جزو ضربی ۲ سے متفاوت ہیں -

۳ - متماثلہ ذیل ثابت کرو :-

٢ب ج - ا^٢	ج^٢	ب^٢
ج^٢	٢ج ا - ب^٢	ا^٢
ب^٢	ا^٢	٢ا ب - ج^٢

≡ (ا^٣ + ب^٣ + ج^٣ - ٣ا ب ج)^٢

یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہوتا ہے اگر ہم دو متماثل مقطعوں (32

ا	ب	ج
ب	ج	ا
ج	ا	ب

،

- ا	ج	ب
- ب	ا	ج
- ج	ب	ا

کو باہم ضرب دیں ۔

۴ ـــ دفعہ ۱۳۲ مثال ۱۰ کے مقطع کا مربع لیکر چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کے درمیان ذیل کا رشتہ ثابت کرو جہاں س، س۱، س۲ وغیرہ کے وہی معنی ہیں جو جلد اول کے آٹھویں باب میں بیان کئے گئے ہیں :۔

س.	س۱	س۲	س۳
س۱	س۲	س۳	س۴
س۲	س۳	س۴	س۵
س۳	س۴	س۵	س۶

$= $ (بہ - جہ)^2 (عہ - ضہ)^2 (جہ - عہ)^2 (بہ - ضہ)^2 $\times$ (عہ - بہ)^2 (جہ - ضہ)^2

طالب علم کو کسی درجہ کی مساوات کے لئے ایک متناظر مقطع (اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں) جو فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے لکھ لینے میں کوئی دقت محسوس نہ ہو گی ۔

۵ ـــ مقطع

س۶	س۵	س۴	س۳	لا^3
س۵	س۴	س۳	س۲	لا^2
س۴	س۳	س۲	س۱	لا
س۳	س۲	س۱	س.	۱
ما^3	ما^2	ما	۱	.

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو جسمیں س۱، س، س۲، وغیرہ تین مقداروں ع، بہ، جہ کی قوتوں کے مجموعے ہیں۔ یہ مقطع، دو مقطعوں

عہ³	بہ³	جہ³	لا³	۰
عہ²	بہ²	جہ²	لا²	۰
عہ	بہ	جہ	لا	۰
۱	۱	۱		۰
۰		۰	۰	۱

،

عہ³	بہ³	جہ³	۰	ما³
عہ²	بہ²	جہ²	۰	ما²
عہ	بہ	جہ	۰	ما
۱	۱	۱	۰	۱
۰	۰	۰	۱	۰

کا حاصل ضرب ہے اور انمیں سے ہر ایک آسانی کے ساتھ اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔

(33) ٦۔ مثال ۸ ٤ صفحہ ۸۰ جلد اول کا نتیجہ ذیل کے دو مقطعوں کو ضرب دیکر ثابت کرو:-

لا	ما	ی
ی	لا	ما
ما	ی	لا

،

لاَ	ماَ	یَ
یَ	لاَ	ماَ
ماَ	یَ	لاَ

۷۔ ثابت کرو کہ مختلف رتبوں کے دو مقطعوں کو ضرب دیا جا سکتا ہے کیونکہ ان کے رتبہ مساوی بنائے جا سکتے ہیں چنانچہ کسی مقطع کا رتبہ، ستونوں کی کوئی تعداد اور صفوں کی مساوی تعداد جمع کرنے سے بڑھایا جا سکتا ہے جبکہ جمع کردہ ارقام میں وتری ارقام اکائیاں ہوں اور باقی سب صفر۔ مثلاً

ا۱	ب۱
ا۲	ب۲

کو لکھا جا سکتا ہے

۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۰	ا۱	ب۱
۰	۰	ا۲	ب۲

جمع کردہ عناصر کا صرف یہ اثر ہو گا کہ مقطع اکائی سے ضرب کھا جائیگا۔

زیادہ عام صورت میں جمع کردہ عناصر کا ایک جٹ (یعنے وہ جو وتر کی داہنی طرف یا بائیں طرف ہوں) کسی مقداروں کا لیا جا سکتا ہے بشرطیکہ باقی دوسرا جٹ صفروں پر مشتمل ہو۔ چنانچہ (ا$_1$ ب$_2$) کو ذیل کی دو شکلوں میں سے کسی ایک میں لکھا جا سکتا ہے :۔

ا	عہ	بہ	جہ
۰	ا	ضہ	صہ
۰	۰	ا$_1$	ب$_1$
۰	۰	ا$_2$	ب$_2$

،

ا	عہ	بہ	جہ
۰	ا	۰	۰
۰	ضہ	ا$_1$	ب$_1$
۰	صہ	ا$_2$	ب$_2$

دفعہ ۱۳۴ کے پھیلاؤ کے ذریعہ یہ ظاہر ہے ۔

۱۴۳۔ مستطیلی آراستے ۔ وہ آراستہ جسمیں صفونکی تعداد ستونوں کی تعداد کے مساوی نہ ہو مستطیلی کہا جا سکتا ہے وہ خود کسی معین تفاعل کو تعبیر نہیں کرتے ۔ لیکن اگر ایک ہی ابعاد کے دو ایسے آراستے دئے جائیں تو دفعہ ۱۴۱ کے عمل سے انکے ذریعہ ہم ایک مقطع اخذ کر سکتے ہیں جسکی قیمت کی اب ہم تحقیق کرینگے ۔

(۱) جب ستونوں کی تعداد صفوں کی تعداد سے متجاوز ہو۔

تمثیلاً دو مستطیلی آراستے لو

ا$_1$ ب$_1$ ج$_1$ د$_1$
ا$_2$ ب$_2$ ج$_2$ د$_2$ } (۱)

عہ$_1$ بہ$_1$ جہ$_1$ ضہ$_1$
عہ$_2$ بہ$_2$ جہ$_2$ ضہ$_2$ } (۲)

اور انپر وہی عمل کرو جو دو مقطعوں کو ضرب دینے میں کیا جاتا ہے (34

تو ہمیں مقطع

ا$_1$عہ$_1$ + ب$_1$بہ$_1$ + ج$_1$جہ$_1$ + د$_1$ضہ$_1$	ا$_1$عہ$_2$ + ب$_1$بہ$_2$ + ج$_1$جہ$_2$ + د$_1$ضہ$_2$
ا$_2$عہ$_1$ + ب$_2$بہ$_1$ + ج$_2$جہ$_1$ + د$_2$ضہ$_1$	ا$_2$عہ$_2$ + ب$_2$بہ$_2$ + ج$_2$جہ$_2$ + د$_2$ضہ$_2$

حاصل ہوتا ہے۔ اِسکی قیمت آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتی ہے

$$(\text{ا}_1\ \text{ب}_2)(\text{عہ}_1\ \text{بہ}_2) + (\text{ا}_1\ \text{ج}_2)(\text{عہ}_1\ \text{جہ}_2) + (\text{ا}_1\ \text{د}_2)(\text{عہ}_1\ \text{ضہ}_2)$$

$$+ (\text{ب}_1\ \text{ج}_2)(\text{بہ}_1\ \text{جہ}_2) + (\text{ب}_1\ \text{د}_2)(\text{بہ}_1\ \text{ضہ}_2) + (\text{ج}_1\ \text{د}_2)(\text{جہ}_1\ \text{ضہ}_2)$$

یعنی ایک آراستے سے جتنے مقطع بن سکتے ہیں (صفونکی تعداد کے مساوی ستونوں کی تعداد لینے سے) اِنکو دوسرے آراستے سے جو متناظر مقطع بنتے ہیں اُن کے ساتھ ضرب دو اور ایسے سب حاصل ضربوں کو جمع کرو تو مندرجہ بالا قیمت اس مجموعہ کے مساوی ہے۔

اس مسئلہ کا دوسرا ثبوت جو دفعہ ۴۲ میں بیان کردہ مقطعونکی ضرب کے مماثل ہے مندرجہ ذیل مثالوں میں ملیگا۔ اِن دونوں ثبوتوں میں سے کسی کو بھی آسانی کے ساتھ عام صورت کے لئے وسعت دیجا سکتی ہے۔

(۲) جب صفوں کی تعداد ستونوں کی تعداد سے بڑی ہو تو حاصل شدنی مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔

تمثیلاً دو آراستے

$$\left.\begin{matrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{matrix}\right\} (1) \qquad \left.\begin{matrix} \text{عہ}_1 & \text{بہ}_1 \\ \text{عہ}_2 & \text{بہ}_2 \\ \text{عہ}_3 & \text{بہ}_3 \end{matrix}\right\} (2)$$

لو اور ضرب کے عمل کی تکمیل کرو تو مقطع ذیل حاصل ہوتا ہے:۔

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{عہ}_1 + \text{ب}_1\text{بہ}_1 & \text{ا}_1\text{عہ}_2 + \text{ب}_1\text{بہ}_2 & \text{ا}_1\text{عہ}_3 + \text{ب}_1\text{بہ}_3 \\ \text{ا}_2\text{عہ}_1 + \text{ب}_2\text{بہ}_1 & \text{ا}_2\text{عہ}_2 + \text{ب}_2\text{بہ}_2 & \text{ا}_2\text{عہ}_3 + \text{ب}_2\text{بہ}_3 \\ \text{ا}_3\text{عہ}_1 + \text{ب}_3\text{بہ}_1 & \text{ا}_3\text{عہ}_2 + \text{ب}_3\text{بہ}_2 & \text{ا}_3\text{عہ}_3 + \text{ب}_3\text{بہ}_3 \end{vmatrix}$$

اب یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ یہ مقطع وہی ہے جو پیدا ہوتا اگر صفروں کا ایک ستون دئے ہوئے آرا ستون میں سے ہر ایک میں جمع کر دیا جاتا اور پھر اس طور پر بنے ہوئے مقطعوں کو ضرب دیا جاتا۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مندرجۂ بالا مقطع معدوم ہوتا ہے۔

اسی طرح کا ثبوت عام صورت میں دیا جا سکتا ہے۔ کسی مثال میں صرف اس بات کی ضرورت ہے کہ صفروں کے ستون ہر آراستے میں جمع کر دئے جائیں تاکہ ستونوں کی تعداد صفوں کی تعداد کے مساوی ہو جائے اور پھر ان دو مقطعوں کو ضرب دیدیا جائے۔

مثالیں

۱۔ دو آرا ستوں۔

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \end{matrix}\right\} (1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \end{vmatrix} (2)$$

سے ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} 3 & \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} \\ \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} & \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 \end{vmatrix} \equiv (\text{عہ} - \text{بہ})^2 + (\text{عہ} - \text{جہ})^2 + (\text{بہ} - \text{جہ})^2$$

۲۔ دو آرا ستوں

$$\left.\begin{matrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} \end{matrix}\right\} (1) \qquad \left.\begin{matrix} \text{ا} & -2\text{ب} & \text{ج} \\ \text{اَ} & -2\text{بَ} & \text{جَ} \end{matrix}\right\} (2)$$

سے ثابت کرو کہ

$$۴(ا ج - ب^۲)(ا' ج' - ب'^۲) - (ا ج' + ا' ج - ۲ ب ب')^۲$$
$$\equiv ۴(ب ج' - ب' ج)(ا ب' - ا' ب) - (ا ج' - ا' ج)^۲$$

۳ - آراستے

$$\left.\begin{matrix} ا & ب & ج \\ ا' & ب' & ج' \end{matrix}\right\}$$

کا مُربع لیکر ثابت کرو کہ

$$(ا^۲ + ب^۲ + ج^۲)(ا'^۲ + ب'^۲ + ج'^۲) \equiv (ا ا' + ب ب' + ج ج')^۲$$
$$+ (ب ج' - ب' ج)^۲ + (ج ا' - ج' ا)^۲ + (ا ب' - ا' ب)^۲$$

۴ - آراستے

$$\left.\begin{matrix} ا & ب & ج & د \\ ا' & ب' & ج' & د' \end{matrix}\right\}$$

کا مربع لیکر دفعہ ۲۴۱ مثال ۱ کے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

۵ - متماثلہ ذیل کو ثابت کرو :-

$$\begin{vmatrix} (ا_۱ - ب_۱)^۲ & (ا_۱ - ب_۲)^۲ & (ا_۱ - ب_۳)^۲ & (ا_۱ - ب_۴)^۲ \\ (ا_۲ - ب_۱)^۲ & (ا_۲ - ب_۲)^۲ & (ا_۲ - ب_۳)^۲ & (ا_۲ - ب_۴)^۲ \\ (ا_۳ - ب_۱)^۲ & (ا_۳ - ب_۲)^۲ & (ا_۳ - ب_۳)^۲ & (ا_۳ - ب_۴)^۲ \\ (ا_۴ - ب_۱)^۲ & (ا_۴ - ب_۲)^۲ & (ا_۴ - ب_۳)^۲ & (ا_۴ - ب_۴)^۲ \end{vmatrix} \equiv ۰$$

اِس متماثلہ کو حسب ذیل دو آراستوں کو باہم ضرب دینے سے ثابت کیا جاسکتا ہے

$$\left.\begin{matrix} ا_۱^۲ & ا_۱ & ۱ \\ ا_۲^۲ & ا_۲ & ۱ \\ ا_۳^۲ & ا_۳ & ۱ \\ ا_۴^۲ & ا_۴ & ۱ \end{matrix}\right\} (۱) \qquad \left.\begin{matrix} ۱ & -۲ ب_۱ & ب_۱^۲ \\ ۱ & -۲ ب_۲ & ب_۲^۲ \\ ۱ & -۲ ب_۳ & ب_۳^۲ \\ ۱ & -۲ ب_۴ & ب_۴^۲ \end{matrix}\right\} (۲)$$

(8

۶ — ن ویں درجہ کی عام مساوات کے لئے جسکی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ، وغیرہ ہوں اور اصلوں کی قوتوں کے مجموعے س_1، س_2، وغیرہ، ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 \end{vmatrix} = \Sigma\,(\text{عہ} - \text{بہ})^2$$

یہ فوراً واضح ہو جاتا ہے اگر ہم حسب ذیل آراستے کا مربع لیں:-

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & \text{ضہ} & \cdots \end{matrix}\right\}$$

۷ — عام مساوات کے لئے اسی طرح ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 \end{vmatrix} = \Sigma\,(\text{بہ} - \text{جہ})^2(\text{جہ} - \text{عہ})^2(\text{عہ} - \text{بہ})^2$$

پچھلی مثال کی طرح یہ بھی آسانی کے ساتھ ثابت ہوتا ہے اگر ہم ایک مناسب آراستے کا مربع لیں ۔ نیز اس قسم کے روابط کا سلسلہ قایم کرنے میں یہی عمل اختیار کیا جا سکتا ہے ۔ جب آراستے میں صفوں کی تعداد مساوات کے درجہ کے مساوی ہوتی ہے تو مقطع کی قیمت اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب ہوتی ہے (دیکھو مثال ۴ دفعہ ۱۴۲)۔ جب صفوں کی تعداد مساوات کے درجہ سے بڑھ جائے تو متناظر مقطع کی قیمت صفر ہے ۔ مثلاً چوتھے رتبہ کا مقطع جسکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے دوسرے اور تیسرے درجہ کی مساواتوں کے لئے معدوم ہوتا ہے ۔

۸ — عام مساوات کے لئے ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 \\ \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 & \text{س}_5 \\ 1 & \text{لا} & \text{لا}^2 & \text{لا}^3 \end{vmatrix}$$

= Ƶ (بہ - جہ)^۲ (جہ - عہ)^۲ (عہ - بہ)^۲ (لا - عہ) (لا - بہ) (لا - جہ)

دو آرہ استوں

ا	ا	ا	۰	۰	لا - عہ	لا - بہ	لا - جہ
عہ	بہ	جہ	۰	۰	عہ (لا - عہ)	بہ (لا - بہ)	جہ (لا - جہ)
عہ^۲	بہ^۲	جہ^۲	۰	۰	عہ^۲ (لا - عہ)	بہ^۲ (لا - بہ)	جہ^۲ (لا - جہ)

کو ضرب دیکر ہم ثابت کرتے ہیں کہ

س۰ لا - س۱	س۱ لا - س۲	س۲ لا - س۳
س۱ لا - س۲	س۲ لا - س۳	س۳ لا - س۴
س۲ لا - س۳	س۳ لا - س۴	س۴ لا - س۵

Ƶ کے مساوی ہے اور اسکو آسانی کے ساتھ مجوزہ مقطع میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔

عام طور پر اسی طریقہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (پ + ۱) ویں رتبہ کا ایسی ہی شکل کا مقطع متناظر متشاکل تفاعل کے مساوی ہے جسکی ہر رقم میں ابتدائی مساوات کے پ اجزائے ضربی شامل ہوتے ہیں جبکہ انکو پ اصلوں کے مربع دار فرقوں کے حاصل ضرب سے ضرب دیدیا جائے۔

(37) ۹ - ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو اور پھر اس سے پہلی قسم کے آرا ستوں کی خاصیت کا ایک اور ثبوت اخذ کرو:-

ا۱	ب۱	ج۱	د۱	۰	۰
۰	ا۲	ب۲	ج۲	د۲	۰
-۱	۰	۰	۰	عہ۱	عہ۲
۰	-۱	۰	۰	بہ۱	بہ۲
۰	۰	-۱	۰	جہ۱	جہ۲
۰	۰	۰	-۱	ضہ۱	ضہ۲

لاپلاس کے طریقہ سے اسکو پھیلا کر ہم آسانی کے ساتھ یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ

اسکی قیمت ≡ (ا, ب۲) (ع۳ ب۲) ہے جو صفحہ ۵۳ کے چھ حاصل ضربوں پر مشتمل ہے۔ اور مقطع میں دفعہ ۱۴۲ کی طرح پہلے ستون کو ع۱ سے، دوسرے کو ب۱ سے، وغیرہ ضرب دیکر ان نئے مجموعہ کو پانچویں ستون میں جمع کرکے ہم اس مقطع کو دوسرے رتبہ کے مقطع میں تحویل کردیتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۴۳ (۱) میں ابتداً حاصل کردہ مقطع)۔

۱۴۴ — **خطی مساواتوں کے نظام کا حل۔** ہم نے دفعہ ۱۳۴ میں دیکھا ہے کہ مقطع کو کسی صف یا ستون کے عناصر کے ایک خطی متجانس تفاعل کے طور پر پھیلایا جاسکتا ہے جس میں کسی عنصر کا سر اپنی مناسب علامت کے ساتھ وہ صغیر مقطع ہوتا ہے جو اس عنصر کے جواب میں ہے۔ مثلاً

$$\Delta = ا_۱ \text{ا}_۱ + ا_۲ \text{ا}_۲ + ا_۳ \text{ا}_۳ + \ldots\ldots$$

اب سر ا۱، ا۲، ا۳ وغیرہ دوسرے ستونوں کے عناصر کے ساتھ ن-۱ تماثل رشتوں سے مربوط ہوتے ہیں یعنے

$$ب_۱ \text{ا}_۱ + ب_۲ \text{ا}_۲ + ب_۳ \text{ا}_۳ + \ldots \equiv ۰$$

$$ج_۱ \text{ا}_۱ + ج_۲ \text{ا}_۲ + ج_۳ \text{ا}_۳ + \ldots \equiv ۰ \text{، وغیرہ}$$

کیونکہ ان میں سے ہر ایک مساوات کی سیدھی طرف کا جملہ، مقطع میں ا۱، ا۲، ا۳ وغیرہ کی بجائے متناظر ستون کے عناصر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے اسکو معدوم ہونا چاہئے۔

ان رشتوں کی مدد سے ہم خطی مساواتوں کے نظام کا حل لکھدے سکتے ہیں۔ چنانچہ تین مجہول مقداروں لا، ما، ی کی صورت پر اس کا اطلاق عام طریق عمل کو واضح کردینے کے لئے کافی ہے۔

فرض کرو کہ مساواتیں ہیں

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1\,\text{ی} = \text{م}_1$$
$$\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2\,\text{ی} = \text{م}_2$$
$$\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ب}_3\,\text{ما} + \text{ج}_3\,\text{ی} = \text{م}_3$$

(38) پہلی مساوات کو ا_1 سے، دوسری کو ا_2 سے، تیسری کو ا_3 سے ضرب دو اور جمع کرو تو ما اور ی کے سر متذکرۂ بالا ثابت شدہ رشتوں کی وجہ سے معدوم ہو جاتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ا}_1\text{ا}_1 + \text{ا}_2\text{ا}_2 + \text{ا}_3\text{ا}_3)\,\text{لا} = \text{م}_1\text{ا}_1 + \text{م}_2\text{ا}_2 + \text{م}_3\text{ا}_3$$

یعنی

$$\Delta\,\text{لا} = \begin{vmatrix} \text{م}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{م}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{م}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

جہاں Δ سے وہ مقطع تعبیر ہوتا ہے جو نو مقداروں ا_1، ب_1، ج_1 وغیرہ سے بنتا ہے۔

اسی طرح ب_1، ب_2، ب_3 سے ضرب دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$(\text{ب}_1\text{ب}_1 + \text{ب}_2\text{ب}_2 + \text{ب}_3\text{ب}_3)\,\text{ما} = \text{م}_1\text{ب}_1 + \text{م}_2\text{ب}_2 + \text{م}_3\text{ب}_3$$

یعنی

$$\Delta\,\text{ما} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{م}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{م}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{م}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

جہاں بائیں طرف کا مقطع وہ ہے جو Δ ہو جاتا ہے جبکہ اسمیں دوسرے

ستونوں کے عناصر کی بجائے م۱، م۲، م۳ درج کئے جاتے ہیں۔
اسی طرح ی کے لئے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\Delta\,\text{ی} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{م}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{م}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{م}_3 \end{vmatrix}$$

اِن قیمتوں کو زیادہ اختصار کے ساتھ یوں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\Delta\,\text{لا} = (\text{م}_1\,\text{ب}_2\,\text{ج}_3)،\quad \Delta\,\text{ما} = (\text{ا}_1\,\text{م}_2\,\text{ج}_3)،\quad \Delta\,\text{ی} = (\text{ا}_1\,\text{ب}_2\,\text{م}_3)$$

عام صورت میں لا، ما، ی، وغیرہ کی قیمتیں اس طور پر لکھی جا سکتی ہیں

$$\text{لا} = \frac{(\text{م}_1\,\text{ب}_2\,\text{ج}_3 \ldots \text{ل}_\text{ن})}{(\text{ا}_1\,\text{ب}_2\,\text{ج}_3 \ldots \text{ل}_\text{ن})}،\quad \text{ما} = \frac{(\text{ا}_1\,\text{م}_2\,\text{ج}_3 \ldots \text{ل}_\text{ن})}{(\text{ا}_1\,\text{ب}_2\,\text{ج}_3 \ldots \text{ل}_\text{ن})}،\quad \text{ی} = \frac{(\text{ا}_1\,\text{ب}_2\,\text{م}_3 \ldots \text{ل}_\text{ن})}{(\text{ا}_1\,\text{ب}_2\,\text{ج}_3 \ldots \text{ل}_\text{ن})}\ \text{وغیرہ}$$

جہاں کسی مجہول مقدار کی قیمت معلوم کرنے میں دی ہوئی مساواتوں کی بائیں طرف کی معلومہ مقداروں م۱، م۲، م۳، وغیرہ کو Δ میں مطلوبہ مجہول مقدار کے سروں کی بجائے درج کرنا اور اس طور پر بنے ہوئے مقطع کو Δ سے تقسیم کرنا پڑتا ہے۔

مثالیں

۱۔ اِن مساواتوں کو حل کرو:- (3

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{ا}$$
$$\text{ع}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ی} = \text{ا}_1$$
$$\text{ع}^2\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{ما} + \text{ج}^2\,\text{ی} = \text{ا}_2$$

مندرجہ بالا ضابطوں سے آسانی کے ساتھ حل معلوم کیا جا سکتا ہے اور یہ بتایا جا سکتا ہے کہ کسی مجہول مقدار کی قیمت اِن مساواتوں میں اُس کے سر کے

دو درجی تفاعل اور عہ، بہ، جہ کے متشاکل تفاعلوں (بشمول اعداد مستقل $ل_0$، $ل_1$، $ل_2$) کے طور پر بیان کیجا سکتی ہے۔ اس مقصد کے لئے مجہول مقدار (فرض کرو ما) کی قیمت کو ہم شکل ذیل میں لکھتے ہیں:۔

$$\begin{vmatrix} ما & ۰ & ۱ & ۰ \\ ل_0 & ۱ & ۱ & ۱ \\ ل_1 & جہ & بہ & عہ \\ ل_2 & جہ^2 & بہ^2 & عہ^2 \end{vmatrix} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

جسکو آسانی کے ساتھ فوراً حاصل کیا جا سکتا ہے اگر ہم دی ہوئی مساواتوں کے ساتھ متماثل مساوات ما = ما کو بھی شامل کریں اور دفعہ آئندہ کے طریقہ کی بموجب اسقاط کا عمل کریں۔ اب

$$\begin{vmatrix} ما & ۰ & ۱ & ۰ \\ ل_0 & ۱ & ۱ & ۱ \\ ل_1 & جہ & بہ & عہ \\ ل_2 & جہ^2 & بہ^2 & عہ^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & جہ & بہ & عہ \\ ۰ & جہ^2 & بہ^2 & عہ^2 \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ما & بہ^2 & بہ & ۱ \\ ل_0 & س_2 & س_1 & س_0 \\ ل_1 & س_3 & س_2 & س_1 \\ ل_2 & س_4 & س_3 & س_2 \end{vmatrix}$$

اسلئے اگر (یہ مانکر کہ عہ، بہ، جہ غیر مساوی ہیں) ہم مساوات (۱) کو فرقوں کے حاصل ضرب سے ضرب دیں تو ما، یہ کے دو درجی تفاعل اور تین مقداروں عہ، بہ، جہ کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان ہو جائیگا۔

۲ ۔ دفعہ ،، جلد اول کی مساواتوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ قوتوں کے مجموعے سروں کی رقوم میں مقطعوں کی شکل میں بیان ہو سکتے ہیں اور اور اس کے بالعکس۔

مثلاً

$$\text{س}_2 = \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & 1 \\ 2\text{ب}_2 & \text{ب}_1 \end{vmatrix}, \quad \text{س}_3 = \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & 1 & 0 \\ 2\text{ب}_2 & \text{ب}_1 & 1 \\ 3\text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_1 \end{vmatrix}, \quad \text{س}_4 = \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\text{ب}_2 & \text{ب}_1 & 1 & 0 \\ 3\text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_1 & 1 \\ 4\text{ب}_4 & \text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_1 \end{vmatrix}$$

وغیرہ —

$$2\text{ب}_2 = \begin{vmatrix} \text{س}_1 & 1 \\ \text{س}_2 & \text{س}_1 \end{vmatrix}, \quad 6\text{ب}_3 = \begin{vmatrix} \text{س}_1 & 1 & 0 \\ \text{س}_2 & \text{س}_1 & 2 \\ \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1 \end{vmatrix}, \quad 24\text{ب}_4 = \begin{vmatrix} \text{س}_1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{س}_2 & \text{س}_1 & 2 & 0 \\ \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1 & 3 \\ \text{س}_4 & \text{س}_3 & \text{س}_2 & \text{س}_1 \end{vmatrix}$$

وغیرہ —

(40) **۱۴۵ — خطی متجانس مساواتیں۔** جب ن متغیروں کے درمیان (ن - ۱) خطی متجانس مساواتیں دی جائیں تو ان میں سے کسی ایک کو مساواتوں کی بائیں طرف منتقل کرنے اور پچھلی دفعہ کی طرح حل کرنے سے متغیروں کی نسبتیں متعین ہو سکتی ہیں۔ یاہم ان نسبتوں کو زیادہ سہولت کے ساتھ حسب ذیل طریقہ پر معلوم کر سکتے ہیں۔ ہم چار مقداروں لا، ما، ی، و کے درمیان تین مساواتوں کی مخصوص صورت لیتے ہیں جو عام طریق عمل کو واضح کرنیکے لئے کافی ہے :۔

$$\left.\begin{aligned} \text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1\text{ی} + \text{د}_1\text{و} &= 0 \\ \text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2\text{ی} + \text{د}_2\text{و} &= 0 \\ \text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3\text{ما} + \text{ج}_3\text{ی} + \text{د}_3\text{و} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

انمیں ایک چوتھی مساوات شامل کیجا سکتی ہے جسکے سر غیر متعین ہوں یعنی

$$\text{ا}_4\text{لا} + \text{ب}_4\text{ما} + \text{ج}_4\text{ی} + \text{د}_4\text{و} = \text{له} \quad \ldots\ldots (2)$$

معمول کی طرح ($ا_۱$ ب$_۲$ ج$_۳$ د$_۴$) کو Δ سے تعبیر کر کے اور دفعہ گذشتہ کے طریقہ سے اِن چار مساواتوں کو حل کر کے ہم م$_۱$ = ۰، م$_۲$ = ۰، م$_۳$ = ۰، م$_۴$ = لہ ہونے کی وجہ سے ذیل کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں:-

$$\Delta \text{ لا} = \text{لہ } ا_۴ ،\ \Delta \text{ ما} = \text{لہ ب}_۴ ،\ \Delta \text{ ی} = \text{لہ ج}_۴ ،\ \Delta \text{ و} = \text{لہ د}_۴$$

یعنی
$$\frac{\text{لا}}{ا_۴} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}_۴} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}_۴} = \frac{\text{و}}{\text{د}_۴} = \frac{\text{لہ}}{\Delta} \quad ......(۳)$$

انمیں سے پہلی تین مساواتیں، لا، ما، ی، و کی نسبتوں کو دی ہوئی تین مساواتوں کے سروں کی رقوم میں بیان کرتی ہیں اور عام صورت میں متغیر، اُن سروں کے متناسب ہوتے ہیں جو ن ویں صف کے عناصر کی رقوم میں مقطع Δ کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں جبکہ یہ ن ویں صف، دی ہوئی مساواتوں سے حاصل ہونیوالی (ن-۱) صفوں میں اضافہ کردیجائے۔

اب ہم وہ شرط بیان کر سکتے ہیں کہ ن خطی متجانس مساواتیں ایک دوسری کے ساتھ صحیح ہوں۔ مثلاً مساوات (۲)، جبکہ لہ = ۰، مساواتوں (۱) کے ساتھ صحیح ہو۔ ہمیں صرف (۱) سے اخذ کردہ نسبتوں کو (۲) میں درج کرنا پڑیگا جس سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{لہ}_۴ ا_۴ + \text{ب}_۴ \text{ب}_۴ + \text{ج}_۴ \text{ج}_۴ + \text{د}_۴ \text{د}_۴ = ۰$$

یعنی $\Delta = ۰$

اسی چیز کا اظہار مساواتوں (۳) سے ہوتا ہے کیونکہ اگر (41)
لہ = ۔ اور اگر لا، ما، ی، و سب کے سب معدوم نہ ہوں تو
Δ کو معدوم ہونا چاہئے۔

جو کچھ ثابت ہوا اسکو یوں بیان کیا جا سکتا ہے :- **ن مقداروں کی خطی اور متجانس ن مساواتوں سے اِن ن مقداروں کو ساقط کرنیکا نتیجہ یہ ہوگا کہ وہ مقطع جو دی ہوئی مساواتوں کے سروں سے بنتا ہے صفر کے مساوی ہوگا۔**

۱۴۶ — متکافی مقطعات ۔ اجزائے ضربی اَ$_1$، بَ$_1$، جَ$_1$...
اَ$_2$، بَ$_2$، وغیرہ کو (دیکھو دفعہ ۱۳۴) جو مقطع کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں (یعنے پہلے صغیر مقطعات کو انکی مناسب علامت کے ساتھ) مقلوب عناصر یا اجزائے ترکیبی کہا جا سکتا ہے اور اِن سے بننے والے مقطع کو مقلوب یا **متکافی مقطع** ۔ اب ہم چند مفید رشتے ثابت کرینگے جو دئے ہوئے مقطع اور اس کے متکافی مقطع میں پائے جاتے ہیں :-

(۱) دئے ہوئے مقطع کی رقوم میں متکافی مقطع کو بیان کرنا ۔ فرض کرو کہ Δ کا متکافی مقطع Δ' سے تعبیر ہوتا ہے ۔
دونوں مقطعوں

Δ ≡ | ا$_1$ ب$_1$ ج$_1$ / ا$_2$ ب$_2$ ج$_2$ / ا$_3$ ب$_3$ ج$_3$ | ، Δ' ≡ | اَ$_1$ بَ$_1$ جَ$_1$ / اَ$_2$ بَ$_2$ جَ$_2$ / اَ$_3$ بَ$_3$ جَ$_3$ |

کو ضرب دو تو حاصل ضربی مقطع میں تمام عناصر سوائے اُنکے جو وتر میں ہیں معدوم ہو جاتے ہیں (دفعہ ۱۴۴) اور نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^{3}$$

پس $\Delta' = \Delta^{2}$

تیسرے رتبہ کے دو مقطعوں کی مخصوص صورت میں جو عمل یہاں اختیار کیا گیا ہے اسکا اطلاق عام صورت میں بھی اسی طرح ہو سکتا ہے۔ چنانچہ ہمیں حاصل ہوگا $\Delta\Delta' = \Delta^{\text{ن}}$ یعنی $\Delta' = \Delta^{\text{ن}-1}$۔

پس متکافی مقطع دئے ہوئے مقطع کی (ن-۱) ویں قوت کے مساوی ہوتا ہے۔

(42) (۲) ابتدائی عناصر کی رقوم میں متکافی مقطع کے کسی صغیر کو بیان کرنا۔

تمثیلاً ہم چوتھے رتبہ کا مقطع لیتے ہیں اور اس کے متکافی کے پہلے صغیر کو ابتدائی مقطع کے عناصر کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔ مساواتِ ذیل میں داہنی طرف کے دو مقطعوں کو ضرب دینے اور دفعہ ۱۴۴ کی متماثلہ مساواتیں استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{1} & \text{ب}_{1} & \text{ج}_{1} & \text{د}_{1} \\ \text{ا}_{2} & \text{ب}_{2} & \text{ج}_{2} & \text{د}_{2} \\ \text{ا}_{3} & \text{ب}_{3} & \text{ج}_{3} & \text{د}_{3} \\ \text{ا}_{4} & \text{ب}_{4} & \text{ج}_{4} & \text{د}_{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{\text{ا}}_{2} & \mathbf{\text{ب}}_{2} & \mathbf{\text{ج}}_{2} & \mathbf{\text{د}}_{2} \\ \mathbf{\text{ا}}_{3} & \mathbf{\text{ب}}_{3} & \mathbf{\text{ج}}_{3} & \mathbf{\text{د}}_{3} \\ \mathbf{\text{ا}}_{4} & \mathbf{\text{ب}}_{4} & \mathbf{\text{ج}}_{4} & \mathbf{\text{د}}_{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_{1} & 0 & 0 & 0 \\ \text{ا}_{2} & \Delta & 0 & 0 \\ \text{ا}_{3} & 0 & \Delta & 0 \\ \text{ا}_{4} & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$$

یعنی

$$\Delta \begin{vmatrix} ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ب_3 & ج_3 & د_3 \\ ب_4 & ج_4 & د_4 \end{vmatrix} = ا_1 \Delta^3$$

یا $(ب_2 \; ج_3 \; د_4) = ا_1 \Delta^2$

پس Δ' کا پہلا صغیر جو $ا_1$ کا متمم ہے اس طور پر بیان ہو جاتا ہے۔ پھر Δ' کے دوسرے صغیروں کو بیان کرنے کے لئے ہم بالکل اسکے مشابہ عمل اختیار کرتے ہیں۔

چنانچہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 & د_3 \\ ا_4 & ب_4 & ج_4 & د_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 & د_3 \\ ا_4 & ب_4 & ج_4 & د_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & 0 & 0 \\ ا_2 & ب_2 & 0 & 0 \\ ا_3 & ب_3 & \Delta & 0 \\ ا_4 & ب_4 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$$

جس سے

$$\Delta \begin{vmatrix} ج_3 & د_3 \\ ج_4 & د_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} \Delta^2$$

یا $(ج_3 \; د_4) = (ا_1 \; ب_2) \Delta$

عام مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں :— م رتبہ کا صغیر جو مقلوب عناصر سے بنتا ہے دو مقداروں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے، ایک مقدار ابتدائی مقطع Δ کے متناظر صغیر کا متمم مقطع ہے اور دوسری مقدار Δ کی (م - ۱) ویں قوت۔ ثبوت کے متذکرہ بالا طریقہ کی تعمیم ہو سکتی ہے۔ مثلاً پانچویں

رتبہ کے مقطع کی صورت میں تیسرے رتبہ کے ایک صغیر کے لئے طالب علم حسب ذیل جملے کی آسانی کے ساتھ تصدیق کر سکتا ہے:

$$\Delta^{2}\,(\text{ا}_1\,\text{ب}_2) = (\text{ج}_3\,\text{د}_4\,\text{ع}_5)$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر ابتدائی مقطع Δ معدوم ہو جائے تو نہ صرف اسکا متکافی مقطع معدوم ہوتا ہے بلکہ کسی رتبہ کے اسکے سب صغیر بھی معدوم ہوتے ہیں۔ دوسرے رتبہ کے صغیروں کا معدوم ہونا ذیل کی مفید شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:- جب مقطع معدوم ہوتا ہے تو اس کے متکافی مقطع کی کسی صف کے عناصر کسی دوسری صف کے عنصروں کے متناسب ہوتے ہیں اور کسی ستون کے عنصر کسی دوسرے ستون کے عنصروں کے متناسب۔

۱۴۷۔ **متشاکل مقطعات۔** مقطع کے دو عنصروں کو ہم مزدوج اُسوقت کہینگے جبکہ صدر عناصر کے لحاظ سے ایک کا مقام صفوں میں وہی ہو جو دوسرے کا ستونوں میں ہے۔ مثلاً د_2 اور ب_4 مزدوج ہیں کیونکہ ایک، دوسری صف میں چوتھا مقام اختیار کرتا ہے اور دوسرا، دوسرے ستون میں چوتھا مقام۔ صدر عناصر میں سے ہر ایک اپنا آپ مزدوج ہے۔ کوئی دو مزدوج عناصر ایک خط میں واقع ہوتے ہیں جو صدر وتر پر عمود ہوتا ہے اور وہ اس سے مخالف سمتوں میں مساوی فاصلے پر رہتے ہیں۔

متشاکل مقطع وہ ہے جسمیں ہر دو مزدوج عناصر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔ ایسے مقطعات کی مثالیں طالب علم کو

دفعہ ۱۳۴ امثلہ ۲، ۹، ۱۰ اور دفعہ ۱۳۵ مثال ۴ میں ملینگی۔

متشاکل مقطع میں کسی دو مزدوج عناصر کے متمم پہلے صغیر مساوی ہوتے ہیں کیونکہ اُن میں صرف صفوں اور ستونوں کے باہمی تبادلہ کا فرق ہوتا ہے۔ متناظر مقلوب عناصر بھی مساوی ہوتے ہیں اور دونوں صورتوں میں صغیروں کی علامتیں وہی ہوتی ہیں۔ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ **ایک متشاکل مقطع کا متکافی مقطع بھی خود متشاکل ہوتا ہے۔**

صدر صغیر سب کے سب متشاکل مقطعات ہیں۔

دفعہ ۱۳۷ اکا پھیلاؤ کا طریقہ متشاکل مقطعوں کی صورت میں (44)
خاص طور پر مفید ہے جیسا کہ حسب ذیل مثالوں سے واضح ہو جائیگا

مثالیں

۱۔ متشاکل مقطع

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

$\Delta \equiv$ (مقطع اوپر)

کا متکافی مقطع معلوم کرو۔

دفعہ ۱۳۴ کی بموجب متکافی عصروں کو بڑے حرفوں سے تعبیر کرو تو Δ کو شکلوں ا ا + ھ ھ + گ گ، ھ ھ + ب ب + ف ف، گ گ + ف ف + ج ج میں سے کسی ایک میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ اب متکافی مقطع 'Δ کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں:-

'Δ ≡

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

≡

ب ج - ف²	ف گ - ج ھ	ھ ف - ب گ
ف گ - ج ھ	ج ا - گ²	گ ھ - ا ف
ھ ف - ب گ	گ ھ - ا ف	ا ب - ھ²

۲۔ اسی طرح

Δ ≡

ا	ھ	گ	ل
ھ	ب	ف	م
گ	ف	ج	ن
ل	م	ن	د

کا منکافی معلوم کرو۔

پچھلی مثال میں استعمال شدہ ترقیم کی متشابہ ترقیم استعمال کرو تو Δ کو اشکال

ا اَ + ھ ھَ + گ گَ + ل لَ، ھ ھَ + ب بَ + ف فَ + م مَ وغیرہ میں سے جس کسی میں ہم چاہیں پھیلا سکتے ہیں۔ اب Δ میں اسکے عناصر کی بجائے متناظر بڑے حروف درج کرنے سے منکافی مقطع حاصل ہوجاتا ہے۔ طالب علم کو حسب ضرورت کسی منکافی عنصر کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھ لینے میں کوئی دقت محسوس نہیں ہوگی۔ مثلاً فَ وہ صغیر ہے جو ف کا متمم ہے (اپنی مناسب علامت کے ساتھ جو اس صورت میں منفی ہے) اور اس لئے فَ

-

ا	ھ	ل
گ	ف	ن
ل	م	د

کے پھیلاؤ سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۔ دفعہ ۱۳۴ مثال ۱۰ کے مقطع Δ کو دفعہ ۱۳۷ کے طریقہ سے پھیلاؤ۔

آخری صف اور آخری ستون کو پہلی صف اور پہلے ستون کے مقامات میں منتقل کرنے اور مثال ۱ کی ترقیم صدر صغیر کے مقلوب (45) عناصر کے لئے استعمال کرنے سے نتیجہ کو فوراً شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے

Δ = اَ لَ۲ + ب مَ۲ + ج نَ۲ + ۲ ف مَ نَ + ۲ گ نَ لَ + ۲ ھ لَ مَ ۔

اب چونکہ صفوں اور ستونوں دونوں کو اُلٹی ترتیب میں لکھنے سے مقطع نہیں بدلتا اسلئے اگر مقطع کا پھیلاؤ آخری صف اور آخری ستون کی رقوم میں مطلوب ہو (جیساکہ اس مثال میں) تو یہ ضروری نہیں کہ ان کو پہلی صف اور پہلے ستون کے مقامات میں منتقل کر دیا جائے۔ مقطع جس شکل میں دیا گیا ہے اسی شکل میں اسکو پھیلایا جا سکتا ہے بشرطیکہ دفعہ ۱۳۷ کے قاعدہ میں صدر عنصر اور اسکے صغیر کی بجائے علی الترتیب آخری وتری عنصر اور اس کا متمم صغیر لکھد یا جائے۔

۴۔ اوپر کی مثال ۲ کے مقطع ∆ کو دفعہ ۱۳۷ کے طریقہ سے آخری صف اور آخری ستون کی رقوم میں پھیلاؤ۔

مثال ۳ کے آخری نوٹ کو مدنظر رکھنے اور اُ، ب، ج، ف، گ، ھ سے اُنہی مقداروں کو تعبیر کرنے سے جو امثلہ ۱ اور ۳ میں کی گئی تھیں نتیجہ کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:۔

∆ = د	ا ھ گ ھ ب ف گ ف ج	- ال² - ب م² - ج ن² - ۲ ف م ن - ۲ گ ن ل - ۲ ھ ل م	

جب کسی رتبہ کے متشاکل مقطع کو متشاکل حاشیہ (یعنے اُفقاً اور انتصاباً وہی عناصر ہوں) لگایا جاتا ہے تو نتیجہ صریحاً ایک متشاکل مقطع ہوگا جسکا رتبہ دئے ہوئے مقطع کے رتبہ سے بقدر ایک کے بڑا ہوگا۔ دفعہ ۱۳۷ کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ عام طور پر حاشیہ لگائے ہوئے مقطع کے پھیلاؤ میں ابتدائی مقطع اضافہ کردہ صف اور ستون میں جو عنصر مشترک ہے اُس سے ضرب دینے کے بعد داخل ہوتا ہے اور اسکے ساتھ ما بقی اضافہ کردہ عناصر کا ایک دو درجی ہمذات تفاعل۔

۵۔

∆ ≡	ا	ھ	گ	ل	عہ
	ھ	ب	ف	م	بہ
	گ	ف	ج	ن	جہ
	ل	م	ن	د	ضہ
	عہ	بہ	جہ	ضہ	.

کو پھیلاؤ۔ ظاہر ہے کہ مثال ۲ کے مقطع کو متشاکل حاشیہ لگانے سے یہ مقطع پیدا ہوا ہے جس میں جمع کردہ خطوط کا مشترک عنصر صفر ہے۔ نتیجہ صریحاً عہ، بہ، جہ، ضہ کا ایک دو درجی متجانس تفاعل ہے اور مثال ۲ کی ترقیم کی مدد سے ∆ کی قیمت فوراً شکل ذیل میں لکھی جا سکتی ہے:۔

ا عہ^{2} + ب بہ^{2} + ج جہ^{2} + د ضہ^{2} + ۲ ف بہ جہ + ۲ گ جہ عہ + ۲ ھ عہ بہ

+ ۲ ل عہ ضہ + ۲ م بہ ضہ + ۲ ن جہ ضہ

۶۔ دفعہ ۱۴۱ کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ کسی مقطع کا مربع ایک متشاکل مقطع ہوتا ہے۔

۷۔ دو متکافی مقطعوں کا حاصل ضرب ابتدائی مقطعوں کے حاصل ضرب کا متکافی مقطع ہوتا ہے۔

(46) **۱۴۸۔ معوج متشاکل اور معوج مقطعات۔ معوج متشاکل** مقطع وہ ہے جس میں ہر عنصر اپنے مزدوج کے مساوی مگر علامت میں مختلف ہو۔ اب چونکہ ہر صدر عنصر اپنا آپ مزدوج ہوتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایسے مقطع میں تمام صدر عناصر صفر ہیں۔

وہ مقطع جس میں تمام عناصر سوائے صدر عنصروں کے اپنے مزدوجوں کے مساوی اور علامت میں مختلف ہوں معوج مقطع ہے۔ پس معوج متشاکل مقطع صفر وتری ہے اور معوج مقطع میں وتری عناصر موجود ہوتے ہیں۔ دفعہ ۱۳۶ کے طریقہ سے معوج مقطع کا پھیلاؤ معوج متشاکل مقطعوں کے پھیلاؤ پر منحصر کیا جا سکتا ہے۔

اس دفعہ کا بقیہ حصہ معوج متشاکل مقطعوں کے بعض مفید خواص ثابت کرنے میں استعمال کیا جائیگا۔

(۱) طاق رتبہ کا معوج متشاکل مقطع معدوم ہوتا ہے۔

کیونکہ کسی معوج متشاکل مقطع ∆ کی قیمت نہیں بدلتی اگر ستونوں کو صفوں میں بدل دیا جائے اور پھر تمام صفوں کی علامتیں بدل دی جائیں۔

لیکن جب مقطع کا رتبہ طاق ہو تو اس عمل سے ∆ کی علامت بدلنی چاہئے۔ پس اس صورت میں ∆ معدوم ہو جاتا ہے۔ مثلاً

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \text{ا} & \text{ب} \\ -\text{ا} & 0 & \text{ج} \\ -\text{ب} & -\text{ج} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

(۲) ن ویں رتبہ کے معوج متشاکل مقطع کا متکافی مقطع ایک متشاکل مقطع ہو گا جب ن طاق ہو اور ایک معوج متشاکل مقطع جب ن جفت ہو۔

کسی معوج متشاکل مقطع میں مزدوج عنصروں کے ایک جوڑے کے جواب میں جو صغیر ہوتے ہیں وہ صرف صفوں اور ستونوں کے باہمی تبادلہ اور تمام عنصروں کی علامتوں کے لحاظ سے متفرق ہوتے ہیں۔ پس دونوں صغیر مساوی ہیں جب انکا رتبہ جفت ہو یعنی جب ن طاق ہو اور دونوں مساوی مگر علامت میں مختلف ہیں جب ن جفت ہو۔ اس لئے پہلی صورت میں متکافی مقطع متشاکل ہے اور دوسری صورت میں معوج متشاکل کیونکہ اس کے صدر وتری عنصر سب کے سب طاق رتبہ کے معوج متشاکل مقطعات ہیں۔

(۳) جفت رتبہ کا معوج متشاکل مقطع ایک کامل مربع ہوتا ہے۔ (47

یہ اُن اصولوں سے ثابت ہوتا ہے جو دفعہ ۱۴۶ میں بیان ہوئے ہیں۔ مثلاً چوتھے رتبہ کا مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ -\text{ا} & 0 & \text{د} & \text{ع} \\ -\text{ب} & -\text{د} & 0 & \text{ف} \\ -\text{ج} & -\text{ع} & -\text{ف} & 0 \end{vmatrix}$$

لو اور فرض کرو کہ اس کے متکافی مقطع کے عناصر ا$_{۱}$، ب$_{۱}$، ...، ا$_{۲}$ وغیرہ

سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب دفعہ ۱۴۶ (۲) کی رو سے

$$\Delta = |\text{ا}_{\text{۲}}\text{ب}_{\text{۱}} - \text{ا}_{\text{۱}}\text{ب}_{\text{۲}}| \begin{vmatrix} \cdot & \text{ف} \\ \text{-ف} & \cdot \end{vmatrix} = \text{ف}^{\text{۲}}\Delta$$

اب چونکہ ا۱ اور ب۲ طاق رتبہ کے معوج متشاکل مقطعات ہیں وہ معدوم ہو جاتے ہیں اور ا۲ = -ب۱ کیونکہ یہ مزدوج صغیر ہیں۔ پس ف۲ Δ = ا۲^۲ جو اس بات کو ثابت کرتا ہے کہ Δ ایک کامل مربع ہے۔ اسی طرح چھٹے رتبہ کے مقطع Δ کے لئے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ Δ اور چوتھے رتبہ کے ایک معوج متشاکل مقطع کا حاصل ضرب ایک کامل مربع ہے اور چونکہ یہ آخری مقطع بموجب ثبوت بالا ایک کامل مربع ہے اسلئے Δ بھی ایک کامل مربع ہے۔ چھٹے رتبہ کے مقطع کے لئے اس مسئلہ کی صداقت ثابت کرینکے بعد بالکل اسی طرح کے عمل سے آٹھویں رتبہ کے مقطع کے لئے اسکو ثابت کیا جا سکتا ہے اور علیٰ ہذا۔

مثالیں

۱۔ چوتھے رتبہ کے معوج متشاکل مقطع کے لئے ذیل کے جملہ کی تصدیق کرو:۔

$$\begin{vmatrix} \cdot & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{-ا} & \cdot & \text{د} & \text{ع} \\ \text{-ب} & \text{-د} & \cdot & \text{ف} \\ \text{-ج} & \text{-ع} & \text{-ف} & \cdot \end{vmatrix} = (\text{ا ف} - \text{ب ع} + \text{ج د})^{\text{۲}}$$

۲۔ معوج مقطع

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{-ا} & \text{لا} & \text{د} & \text{ع} \\ \text{-ب} & \text{-د} & \text{لا} & \text{ف} \\ \text{-ج} & \text{-ع} & \text{-ف} & \text{لا} \end{vmatrix}$$

کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

جب ایک معوج مقطع کو پھیلانے میں دفعہ ۱۳۶ کا طریقہ استعمال کیا جائے تو یہ دیکھ لیا جائے کہ پھیلاؤ میں طاق رتبہ کے مقطعات سب کے سب معدوم ہوتے ہیں اور جفت رتبہ کے مقطعات مربعوں کی شکل میں بیان ہو سکتے ہیں۔ یہاں لا کی طاق قوتوں کے سر صریحاً معدوم ہوتے ہیں اور نتیجہ یہ شکل اختیار کرتا ہے

۵ ≡ لا^{4} + (ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} + د^{2} + ع^{2} + ف^{2}) لا^{2} + (اف − ب ع + ج د)^{2}

۳ — ذیل کے معوج مقطع کو پھیلاؤ۔

۱	ا	ب	ج	د
−ا	ب	ع	ف	گ
−ب	−ع	ج	ھ	خ
−ج	−ف	−ھ	د	ز
−د	−گ	−خ	−ز	ع

نتیجہ کو شکل

۱ (ع ز − ف خ + گ ھ)^{2} + Σ ز ا ب ج + ا ب ج د

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلا مجموعہ Σ دس رقموں پر مشتمل ہے جو اسکے محاذی لکھی ہوئی رقم کے متشابہ ہیں اور دوسرے مجموعہ Σ میں پانچ رقمیں شامل ہوتی ہیں۔ وہ ارقام جنمیں دو دو صدر عناصر کے حاصل ضرب شامل ہوتے ہیں اور وہ ارقام جنمیں صدر عناصر بالکل شامل نہیں ہوتے معدوم ہوتی ہیں۔

۴ — جفت رتبہ کے کسی مقطع کا مربع ایک متشاکل مقطع کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

ثبوت کا حسب ذیل طریقہ عام صورت میں بھی اطلاق پذیر ہے۔

(ا$_{1}$ ب$_{2}$ ج$_{3}$ د$_{4}$) کا مربع ذیل کے دو مقطعات کو ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے:۔

ا۱	ب۱	ج۱	د۱		-ب۱	ا۱	-د۱	ج۱
ا۲	ب۲	ج۲	د۲		-ب۲	ا۲	-د۲	ج۲
ا۳	ب۳	ج۳	د۳		-ب۳	ا۳	-د۳	ج۳
ا۴	ب۴	ج۴	د۴		-ب۴	ا۴	-د۴	ج۴

اور انکا حاصل ضرب ہے

۰	-(ا۱ب۲)-(ج۱د۲)	-(ا۱ب۳)-(ج۱د۳)	-(ا۱ب۴)-(ج۱د۴)
(ا۲ب۱)+(ج۲د۱)	۰	-(ا۲ب۳)-(ج۲د۳)	-(ا۲ب۴)-(ج۲د۴)
(ا۳ب۱)+(ج۳د۱)	(ا۳ب۲)+(ج۳د۲)	۰	-(ا۳ب۴)-(ج۳د۴)
(ا۴ب۱)+(ج۴د۱)	(ا۴ب۲)+(ج۴د۲)	(ا۴ب۳)+(ج۴د۳)	۰

جو ایک معوج متشاکل مقطع ہے۔

۵۔ تیسرے رتبہ کے ایک معوج متشاکل مقطع کا متکافی مقطع بناؤ۔

۵ کے لئے وہ شکل استعمال کرو جو دفعہ ہذا کے (۱) میں دیگئی ہے تو آسانی کے ساتھ معلوم ہو جائیگا کہ اس سے ذیل کا متشاکل مقطع حاصل ہوتا ہے:۔

ج²	-ب ج	ا ج
-ب ج	ب²	-ا ب
ا ج	-ا ب	ا²

۶۔ مثال (۱) کے چوتھے رتبہ والے معوج متشاکل مقطع Δ کا متکافی مقطع بناؤ۔

تفاعل اف - ب ع + ج د کو جسکا مربع Δ کے مساوی ہے فہ سے اور مطلوبہ متکافی مقطع کو Δ' سے تعبیر کرو تو

Δ' =

۰	ف فہ	-ع فہ	د فہ
-ف فہ	۰	ج فہ	-ب فہ
ع فہ	-ج فہ	۰	+ ا فہ
-د فہ	ب فہ	-ا فہ	۰

اس معوج متشاکل مقطع کی قیمت مثال ا کے نتیجہ کی مدد سے لکھ لیجا سکتی ہے۔ چنانچہ اسکی تصدیق فوراً ہو جاتی ہے کہ

$$\Delta' = (\text{ا ف} - \text{ب ع} + \text{ج د})^2 \text{ فہ}^4 = \Delta^3$$

۷۔ مثال ۳ کے مقطع میں تمام صدر عناصر کو صفر بنانے سے پانچویں رتبہ کا جو معوج متشاکل مقطع حاصل ہوتا ہے اسکا متکافی مقطع معلوم کرو۔

اب چونکہ متکافی مقطع ایک متشاکل مقطع ہے (دیکھو دفعہ ۱۴۸، ۲) اور پھر چونکہ یہ ایسا مقطع بھی ہے جسمیں کسی خط کے عناصر کسی متوازی خط کے عناصر کے متناسب ہیں (دفعہ ۱۴۶) اس لئے مطلوبہ مقطع شکل ذیل کا ہونا چاہئے :۔

فہ_1^2	$\text{فہ}_1\text{فہ}_2$	$\text{فہ}_1\text{فہ}_3$	$\text{فہ}_1\text{فہ}_4$	$\text{فہ}_1\text{فہ}_5$
$\text{فہ}_2\text{فہ}_1$	فہ_2^2	$\text{فہ}_2\text{فہ}_3$	$\text{فہ}_2\text{فہ}_4$	$\text{فہ}_2\text{فہ}_5$
$\text{فہ}_3\text{فہ}_1$	$\text{فہ}_3\text{فہ}_2$	فہ_3^2	$\text{فہ}_3\text{فہ}_4$	$\text{فہ}_3\text{فہ}_5$
$\text{فہ}_4\text{فہ}_1$	$\text{فہ}_4\text{فہ}_2$	$\text{فہ}_4\text{فہ}_3$	فہ_4^2	$\text{فہ}_4\text{فہ}_5$
$\text{فہ}_5\text{فہ}_1$	$\text{فہ}_5\text{فہ}_2$	$\text{فہ}_5\text{فہ}_3$	$\text{فہ}_5\text{فہ}_4$	فہ_5^2

جس میں فہ_1، فہ_2، فہ_3، فہ_4، فہ_5، ابتدائی عنصروں میں دوسرے درجہ کے پانچ تفاعل ہیں جنکے مربع اُن پانچ پہلے صغیروں کی قیمتیں ہیں جو Δ کے صدر عناصر کے متمم ہیں۔

عام صورت میں کسی طاق رتبہ (۲م + ۱) کے ایک معوج (50
متشاکل مقطع کا متکافی مقطع مندرجۂ بالا شکل کے متشابہ ہوتا ہے جسمیں وتری عناصر (۲م + ۱) تفاعلوں کے جنمیں سے ہر ایک ابتدائی عنصروں میں م ویں درجہ کا تفاعل ہے مربع ہیں اور بقیہ عناصر دو دو کے

حاصل ضرب ہیں۔

۱۴۹۔ مسئلہ۔ اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم ایک اہم مسئلہ بیان کرتے ہیں جو اُس مقطع سے متعلق ہے جس کا صدر پہلا صغیر معدوم ہوتا ہے۔ دفعہ ۱۴۷ کی ترقیم اختیار کرکے ہم ∆ کو ایک معدوم ہونے والا مقطع سمجھتے ہیں اور ثابت شدنی مسئلہ کو یوں بیان کرتے ہیں:-

اگر ایک مقطع ∆ کو جس کی قیمت صفر ہے کسی طریقہ پر حاشیہ لگائیں تو اس طور پر بنے ہوئے مقطع اور ∆ کے صدر پہلے صغیر کا حاصل ضرب، اضافہ کردہ عناصر کے دو خطی متجانس تفاعلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۴۷ کی ترقیم کو برقرار رکھکر ہم یہ ثابت کرینگے کہ ∆′ اور $ا_۱$ کا حاصل ضرب شکل ذیل میں بیان ہو سکتا ہے:-

$$ا_۱ ∆′ = -(ا_۱ع + ب_۱ بہ + ج_۱ جہ + \ldots)(ا_۱ عَ + ا_۱ بَہ + ا_۱ جَہ + \ldots)$$

یہ نتیجہ فوراً دفعہ (۱۴۶) کے ربط (۲) سے حاصل ہوتا ہے اگر ∆ کے متکافی مقطع میں اُن عنصروں کی قیمتوں پر غور کیا جائے جو ا، عَہ، ا کے متکافی ہیں اور پھر ابتدائی عنصروں کی رقوم میں دوسرے رتبہ کا وہ مقطع بیان کیا جائے جو اِن چار عناصر سے بنتا ہے۔ اس نتیجہ کا دوسرا ثبوت آسانی کے ساتھ ایک منعدم مقطع کے متکافی کی خاصیت کی مدد سے (جو یہ ہے کہ اُ، بُ، جُ وغیرہ سے بننے والے مقطع میں کسی خط کے عناصر کسی متوازی خط کے عناصر کے متناسب ہوتے ہیں دفعہ ۱۴۶) دفعہ ۱۴۷ کی بموجب پھیلاکر اخذ کیا جا سکتا ہے۔

اگر مقطع ∆ متشاکل ہو اور اسکو لگایا ہوا حاشیہ بھی متشاکل تو اوپر کی مساوات میں بائیں طرف کے دو اجزائے ضربی مماثل

ہو جاتے ہیں اور مسئلہ شکل ذیل اختیار کرتا ہے :- اگر ایک متشاکل مقطع کو جس کی قیمت صفر ہے متشاکل حاشیہ لگایا جاوے تو اس طور پر بنے ہوئے مقطع اور اس کے صدر دوسرے صغیر کا حاصل ضرب اضافہ کردہ عناصر کے ایک خطی متجانس تفاعل کے مربع (منفی علامت کے ساتھ) کے مساوی ہوتا ہے۔

اصلی مقطع کو Δ سے تعبیر کیا جائے تو اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ کو حسب ذیل مفید شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے :- اگر کسی متشاکل مقطع میں صدر پہلا صغیر معدوم ہو تو خود مقطع اور اس کا صدر دوسرا صغیر مختلف العلامت ہوتے ہیں۔

مثالیں (51)

۱- اگر طاق رتبہ (۲ م + ۱) کے ایک معوج متشاکل مقطع Δ کو کسی طریقہ پر حاشیہ لگایا جائے تو حاصل شدہ مقطع Δ' دو منطق تفاعلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے جنمیں ہر ایک میں اضافہ کردہ عناصر پہلی قوت میں اور ابتدائی عناصر م ویں قوت میں شامل ہوتے ہیں۔

دئے ہوئے معوج متشاکل مقطع کے متکائی کو دفعہ ۸۴ مثال (۷) کے نتیجہ کی بموجب، شکل

$$\begin{vmatrix} \text{فہ}_1^2 & \text{فہ}_1\,\text{فہ}_2 & \text{فہ}_1\,\text{فہ}_3 & \cdot & \cdot \\ \text{فہ}_2\,\text{فہ}_1 & \text{فہ}_2^2 & \text{فہ}_2\,\text{فہ}_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

میں لکھنے اور دفعہ ہذا کا مسئلہ استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا

$$\text{فہ}_1^2\,\Delta' = -(\text{فہ}_1^2\,\text{ع} + \text{فہ}_1\,\text{فہ}_2\,\text{ب} + \text{فہ}_1\,\text{فہ}_3\,\text{ج} + \ldots)(\text{فہ}_1^2\,\text{ع}' + \text{فہ}_1\,\text{فہ}_2\,\text{ب}' + \ldots)$$

یا Δ' = -(فہ$_1$ عہ + فہ$_2$ بہ + فہ$_3$ جہ + ...)(فہ$_1$ عہَ + فہ$_2$ بہَ + فہ$_3$ جہَ + ...)

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر اس نتیجہ میں عہَ، بہَ، جہَ، وغیرہ کو - عہ، - بہ، - جہ، وغیرہ کے مساوی بنایا جائے تو دفعہ ۴۸ا مسئلہ ۳ حاصل ہو جائیگا۔

۲۔ اگر جفت رتبہ ۲م کے ایک معوج متشاکل مقطع کو کسی طریقہ پر حاشیہ لگایا جائے تو حاصل شدہ مقطع دو منطق تفاعلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے جنمیں سے ایک تفاعل عناصر میں م ویں درجہ کا ہے اور دوسرا (م + ۱) ویں درجہ کا۔

اس کو پچھلی مثال سے آسانی کے ساتھ اخذ کیا جا سکتا ہے اگر ہم اُس میں پہلے ستون کے اضافہ کردہ تمام عنصروں کو یعنے عہَ، بہَ، جہَ وغیرہ کو صفر بنا دیں اور صرف آخری عنصر کو = ۱ رکھیں۔ تب مقطع زیر بحث صورت میں تحویل ہو جائیگا جس میں اوپر کی صف اور آخری ستون حاشیہ میں داخل ہونگے۔ نیز یہ معلوم ہوگا کہ نتیجہ میں م ویں درجہ کا جز وضربی ۲م ویں رتبہ کے دئے ہوئے معوج متشاکل مقطع کا جذر المربع ہے۔

۳۔ ثابت کرو

۰	عہ	بہ	جہ
عہَ	۰	ج	-ب
بہَ	-ج	۰	ا
جہَ	ب	-ا	۰

= -(عہ ا + بہ ب + جہ ج)(عہَ ا + بہَ ب + جہَ ج)

۴۔ مقطع

۰	عہ	بہ	جہ	ضہ
عہَ	۰	ج	-ب	لا
بہَ	-ج	۰	ا	ما
جہَ	ب	-ا	۰	ی
ضہَ	-لا	-ما	-ی	۰

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جواب :- $(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ی})\{\text{لا}(\text{بہ جہَ}) + \text{ما}(\text{جہ عہَ}) + \text{ی}(\text{عہ بہَ}) + \text{ا}(\text{عہ ضہَ}) + \text{ب}(\text{بہ ضہَ}) + \text{ج}(\text{جہ ضہَ})\}$

متفرق مثالیں (52)

۱۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\cdot} & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \end{vmatrix} \equiv \text{ب ج}$$

جہاں ب ج سے وہی مراد ہے جو عام طور پر لیجاتی ہے۔

۲۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{بہ} + \text{جہ} & \text{جہ} + \text{عہ} & \text{عہ} + \text{بہ} \\ \text{بہَ} + \text{جہَ} & \text{جہَ} + \text{عہَ} & \text{عہَ} + \text{بہَ} \\ \text{بہً} + \text{جہً} & \text{جہً} + \text{عہً} & \text{عہً} + \text{بہً} \end{vmatrix} \equiv ۲ \begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہَ} & \text{بہَ} & \text{جہَ} \\ \text{عہً} & \text{بہً} & \text{جہً} \end{vmatrix}$$

۳۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{بہ جہ} & \text{بہ جہَ} + \text{بہَ جہ} & \text{بہَ جہَ} \\ \text{جہ عہ} & \text{جہ عہَ} + \text{جہَ عہ} & \text{جہَ عہَ} \\ \text{عہ بہ} & \text{عہ بہَ} + \text{عہَ بہ} & \text{عہَ بہَ} \end{vmatrix} \equiv (\text{بہ جہَ})(\text{جہ عہَ})(\text{عہ بہَ})$$

جہاں بائیں طرف کے اجزائے ضربی دوسرے رتبہ کے مقطعات ہیں۔
صفوں کو بہ جہَ ، جہ عہَ ، عہ بہَ سے تقسیم کرنے اور

$\text{لہ} = \frac{\text{عہ}}{\text{عہَ}}$ ، $\text{مہ} = \frac{\text{بہ}}{\text{بہَ}}$ ، $\text{نہ} = \frac{\text{جہ}}{\text{جہَ}}$ رکھنے سے مقطع (ایک جزو ضربی ترک کرنے سے) شکل ذیل میں تحویل ہو جاتا ہے:۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{مہ} + \text{نہ} & \text{مہ نہ} \\ ۱ & \text{نہ} + \text{لہ} & \text{نہ لہ} \\ ۱ & \text{لہ} + \text{مہ} & \text{لہ مہ} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} ۱ & -\text{لہ} & \text{مہ نہ} \\ ۱ & -\text{مہ} & \text{نہ لہ} \\ ۱ & -\text{نہ} & \text{لہ مہ} \end{vmatrix} \equiv -(\text{مہ} - \text{نہ})(\text{نہ} - \text{لہ})(\text{لہ} - \text{مہ})$$ وغیرہ

۴ ۔ مقطع ذیل کی قیمت معلوم کرو :۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} & \text{بہ جہ} + \text{بہ ضہ} + \text{جہ ضہ} & \text{بہ جہ ضہ} \\ ۱ & \text{عہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} & \text{عہ جہ} + \text{عہ ضہ} + \text{جہ ضہ} & \text{عہ جہ ضہ} \\ ۱ & \text{عہ} + \text{بہ} + \text{ضہ} & \text{عہ بہ} + \text{عہ ضہ} + \text{بہ ضہ} & \text{عہ بہ ضہ} \\ ۱ & \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} & \text{عہ بہ} + \text{عہ جہ} + \text{بہ جہ} & \text{عہ بہ جہ} \end{vmatrix}$$

یہاں چونکہ دو حرفوں کا باہمی تبادلہ دو صفوں کو مماثل بنا دیگا اسلئے یہ مقطع چھ فرقوں کے حاصل ضرب سے صرف ایک عددی جزو ضربی کے لحاظ سے مختلف ہوگا۔ یا ہم اس مقطع کو آسانی کے ساتھ دفعہ ۱۳۲ مثال (۱۰) کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں ۔ اس قسم کے کسی مقطع کی قیمت اسی طریقہ پر معلوم کیجا سکتی ہے اور علامت کی تعیین دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کے طریقہ سے عمل میں آسکتی ہے ۔

(53

۵ ۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{عہ ضہ} + \text{بہ جہ} & \text{بہ}^2\,\text{جہ}^2 + \text{عہ}^2\,\text{ضہ}^2 \\ ۱ & \text{بہ ضہ} + \text{جہ عہ} & \text{جہ}^2\,\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2\,\text{ضہ}^2 \\ ۱ & \text{جہ ضہ} + \text{عہ بہ} & \text{عہ}^2\,\text{بہ}^2 + \text{جہ}^2\,\text{ضہ}^2 \end{vmatrix} \equiv (\text{بہ} - \text{جہ})(\text{عہ} - \text{ضہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{بہ} - \text{ضہ})(\text{عہ} - \text{بہ})(\text{جہ} - \text{ضہ})$$

آخری ستون کو ۲ عہ بہ جہ ضہ سے ضرب دو اور پہلے ستون میں جمع کرو۔ تب مقطع دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کی شکل کا ہو جاتا ہے۔

۶ ۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} ۱ & (\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})^{۲} & (\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})^{۴} \\ ۱ & (\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ})^{۲} & (\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ})^{۴} \\ ۱ & (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})^{۲} & (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})^{۴} \end{vmatrix}$$

$$\equiv ۶۴(\text{بہ} - \text{جہ})(\text{عہ} - \text{ضہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{بہ} - \text{ضہ})(\text{عہ} - \text{بہ})(\text{جہ} - \text{ضہ})$$

۷ ۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{الا} + \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{بلا} + \text{ج} \\ \text{الا} + \text{ب} & \text{بلا} + \text{ج} & ۰ \end{vmatrix} \equiv -(\text{اج} - \text{ب}^{۲})(\text{الا}^{۲} + ۲\,\text{بلا} + \text{ج})$$

پہلی صف کو لا سے ضرب دو اور پھر اسکے اور دوسری صف کے مجموعہ کو تیسری صف میں سے تفریق کرو۔

۸ ۔ اسی طرح ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{الا}^{۲} + ۲\,\text{بلا} + \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} & \text{بلا}^{۲} + ۲\,\text{جلا} + \text{د} \\ \text{ج} & \text{د} & \text{ع} & \text{جلا}^{۲} + ۲\,\text{دلا} + \text{ع} \\ \text{الا}^{۲} + ۲\,\text{بلا} + \text{ج} & \text{بلا}^{۲} + ۲\,\text{جلا} + \text{د} & \text{جلا}^{۲} + ۲\,\text{دلا} + \text{ع} & ۰ \end{vmatrix}$$

$$\equiv - \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ج} & \text{د} & \text{ع} \end{vmatrix} (\text{الا}^{۴} + ۴\,\text{بلا}^{۳} + ۶\,\text{جلا}^{۲} + ۴\,\text{دلا} + \text{ع})$$

۹ ۔ اگر

$$\text{ف}_{۱}(\text{لا}) = \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ج}_{۱}\,\text{لا} + \text{د}_{۱}$$

$$\text{ف}_{۲}(\text{لا}) = \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ج}_{۲}\,\text{لا} + \text{د}_{۲}$$

$$\text{ف}_{۳}(\text{لا}) = \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ب}_{۳}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ج}_{۳}\,\text{لا} + \text{د}_{۳}$$

تو ثابت کرو

ف۱ (لا)	فَ۱ (لا)	فً۱ (لا)	= ۱۸ −	۱	−لا	لا۲	−لا۳
ف۲ (لا)	فَ۲ (لا)	فً۲ (لا)		ا۱	ب۱	ج۱	د۱
ف۳ (لا)	فَ۳ (لا)	فً۳ (لا)		ا۲	ب۲	ج۲	د۲
				ا۳	ب۳	ج۳	د۳

(54) پہلا مقطع آسانی کے ساتھ (ایک جزو ضربی ترک کرنے سے)

ذیل کے مقطع میں تحویل ہو جاتا ہے :—

ا۱ لا + ب۱	ب۱ لا + ج۱	ج۱ لا + د۱
ا۲ لا + ب۲	ب۲ لا + ج۲	ج۲ لا + د۲
ا۳ لا + ب۳	ب۳ لا + ج۳	ج۳ لا + د۳

ہم نے دفعہ ۱۴۲ امثال ۷ میں دیکھا ہے کہ مقطع کا رتبہ اسکی قیمت کو بدلے بغیر بڑھایا جا سکتا ہے۔ مقطع کو محسوب کرنے میں اکثر سہولت اس طور پر پیدا ہو سکتی ہے کہ اضافہ کردہ عناصر کا مناسب انتخاب عمل میں آئے اور انکا حاشیہ لگایا جائے۔ چنانچہ اس آخری مقطع کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے :—

۱	۰	۰	۰
ا۱	ا۱ لا + ب۱	ب۱ لا + ج۱	ج۱ لا + د۱
ا۲	ا۲ لا + ب۲	ب۲ لا + ج۲	ج۲ لا + د۲
ا۳	ا۳ لا + ب۳	ب۳ لا + ج۳	ج۳ لا + د۳

پہلے ستون کو لا سے ضرب دیکر اسکو دوسرے میں سے تفریق کرنے، پھر اس نئے دوسرے ستون کو لا سے ضرب دیکر اسکو تیسرے میں سے تفریق کرنے، اور بالآخر نئے تیسرے ستون کو لا سے ضرب دیکر اسکو چوتھے میں سے تفریق کرنے سے متذکرۂ صدر نتیجہ ملجاتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مقطع

ل لا^2 + ج ما^2 + ب ی^2 − ۱	(ل − ج) لا ما	(ل − ب) لا ی
(ل − ج) لا ما	ل ما^2 + ا ی^2 + ج لا^2 − ۱	(ل − ا) ما ی
(ل − ب) لا ی	(ل − ا) ما ی	ل ی^2 + ب لا^2 + ا ما^2 − ۱

میں ل (لا^2 + ما^2 + ی^2) − ۱، جزو ضربی کے طور پر شریک ہوتا ہے اور دوسرے جزو ضربی میں ل شامل نہیں ہوتا۔

مثال ۹ کی طرح مقطع کو حاشیہ لگاؤ جس میں پہلے ستون کے عناصر ا، ل لا، ل ما، ل ی ہوں اور پہلی صف کے عناصر ا، ۰، ۰، ۰۔ پھر پہلے ستون کا لا گنا دوسرے ستون میں سے، پہلے ستون کا ما گنا تیسرے ستون میں سے، اور پہلے ستون کا ی گنا چوتھے ستون میں سے تفریق کرو۔ اس طور پر بدلے ہوئے مقطع میں پہلی صف میں سے دوسری کے لا گنا، تیسری کے ما گنا اور چوتھی کے ی گنا کے مجموعہ کو تفریق کرو۔

۱۱۔ مقطع

ا$_1$ + لا	ب$_1$	ج$_1$	د$_1$
ا$_2$	ب$_2$ + لا	ج$_2$	د$_2$
ا$_3$	ب$_3$	ج$_3$ + لا	د$_3$
ا$_4$	ب$_4$	ج$_4$	د$_4$ + لا

کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

جواب:۔ لا^4 + (ا$_1$ + ب$_2$ + ج$_3$ + د$_4$) لا^3 + {(ب$_2$ ج$_3$) + (ا$_1$ د$_4$) + (ا$_1$ ج$_3$) + (ب$_2$ د$_4$) + (ا$_1$ ب$_2$) + (ج$_3$ د$_4$)} لا^2 + {(ب$_2$ ج$_3$ د$_4$) + (ا$_1$ ج$_3$ د$_4$) + (ا$_1$ ب$_2$ د$_4$) + (ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$)} لا + (ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ د$_4$)

(55)

۱۲ — ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{اَ} & \text{بَ} & \text{جَ} & \text{دَ} \\ \frac{\text{ا}^2}{\text{اَ}} & \frac{\text{ب}^2}{\text{بَ}} & \frac{\text{ج}^2}{\text{جَ}} & \frac{\text{د}^2}{\text{دَ}} \\ \frac{\text{اَ}^2}{\text{ا}} & \frac{\text{بَ}^2}{\text{ب}} & \frac{\text{جَ}^2}{\text{ج}} & \frac{\text{دَ}^2}{\text{د}} \end{vmatrix} \equiv \frac{-(\text{ب جَ})(\text{ا دَ})(\text{ج اَ})(\text{ب دَ})(\text{ا بَ})(\text{ج دَ})}{\text{ا ب ج د اَ بَ جَ دَ}}$$

۱۳ — تماثلات ذیل کو ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{عه} & \text{عهَ} & \text{عه عهَ} \\ 1 & \text{به} & \text{بهَ} & \text{به بهَ} \\ 1 & \text{جه} & \text{جهَ} & \text{جه جهَ} \\ 1 & \text{ضه} & \text{ضهَ} & \text{ضه ضهَ} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} \\ \text{بَ} & \text{جَ} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ا} \\ \text{جَ} & \text{اَ} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{اَ} & \text{بَ} \end{vmatrix}$$

جہاں

$$\text{ا} = (\text{به} - \text{جه})(\text{عه} - \text{ضه}),\ \text{ب} = (\text{جه} - \text{عه})(\text{به} - \text{ضه}),\ \text{ج} = (\text{عه} - \text{به})(\text{جه} - \text{ضه})$$

$$\text{اَ} = (\text{بهَ} - \text{جهَ})(\text{عهَ} - \text{ضهَ}),\ \text{بَ} = (\text{جهَ} - \text{عهَ})(\text{بهَ} - \text{ضهَ}),\ \text{جَ} = (\text{عهَ} - \text{بهَ})(\text{جهَ} - \text{ضهَ})$$

پہلے مقطع کو پہلے دو ستونوں سے بننے والے صغیروں کی رقوم میں (دیکھو دفعہ ۱۳۵) پھیلا کر ہم آسانی کے ساتھ ثابت کرتے ہیں کہ یہ مقطع

$$\text{ا}(\text{بهَ جهَ} + \text{عهَ ضهَ}) + \text{ب}(\text{جهَ عهَ} + \text{بهَ ضهَ}) + \text{ج}(\text{عهَ بهَ} + \text{جهَ ضهَ})$$

کے مساوی ہے اور پھر متماثلہ مساوات $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} \equiv 0$ کو دفعہ ۲۷ مثال ۱۸ کے رشتوں کے ساتھ استعمال کرنے سے نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ مثال ۱۳ کا مقطع حسب ذیل مقطع کے مساوی ہے:

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{به جه} + \text{عه ضه} & \text{بهَ جهَ} + \text{عهَ ضهَ} \\ 1 & \text{جه عه} + \text{به ضه} & \text{جهَ عهَ} + \text{بهَ ضهَ} \\ 1 & \text{عه به} + \text{جه ضه} & \text{عهَ بهَ} + \text{جهَ ضهَ} \end{vmatrix}$$

یہ نتیجہ دفعہ ۲۷ مثال ۱۸ کے رشتوں سے فوراً حاصل ہوتا ہے۔ اگر نتیجہ میں عہَ، بہَ، جہَ، ضہَ کو عہٗ، بہٗ، جہٗ، ضہٗ کے مساوی رکھا جائے تو ایک متماثلہ مساوات حاصل ہوگی جسکی ایک مخصوص صورت مثال ۵ ہے۔

۱۵۔ حسب ذیل مقطع کو فرقوں کے تفاعل کے طور پر بیان کرو جسکا معدوم ہونا اُس شرط کو تعبیر کرتا ہے جو ایک خط پر چھ نقطوں کے ورتیچ کے لئے ہے۔

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{۱} & \text{عہ} + \text{عہَ} & \text{عہ عہَ} \\ \text{۱} & \text{بہ} + \text{بہَ} & \text{بہ بہَ} \\ \text{۱} & \text{جہ} + \text{جہَ} & \text{جہ جہَ} \end{vmatrix}$$

مقطع کو

$$\begin{vmatrix} \text{عہ}^{\text{۲}} & -\text{عہ} & \text{۱} \\ \text{بہ}^{\text{۲}} & -\text{بہ} & \text{۱} \\ \text{جہ}^{\text{۲}} & -\text{جہ} & \text{۱} \end{vmatrix}$$

سے ضرب دینے اور پھر مساوات کی دونوں طرفوں سے جزو ضربی (بہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - بہ) جدا کرنے سے Δ کی قیمت کو (56)
آسانی کے ساتھ یوں بیان کیا جا سکتا ہے:-

$$\Delta \equiv (\text{عہ} - \text{بہَ})(\text{بہ} - \text{جہَ})(\text{جہ} - \text{عہَ}) + (\text{عہَ} - \text{بہ})(\text{بہَ} - \text{جہ})(\text{جہَ} - \text{عہ})$$

اس نتیجہ کو مثال ۱۳ کے مقطع سے بھی جسکا معدوم ہونا چار نقطوں کے دو جٹوں کے درمیان عام ہم رسم ربط کو بیان کرتا ہے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

۱۶۔ مقطع ذیل کو پھیلاؤ:-

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{۰} & \text{۰} & \text{۰} & \text{ا}_{\text{۴}} \\ -\text{۱} & \text{لا} & \text{۰} & \text{۰} & \text{ا}_{\text{۳}} \\ \text{۰} & -\text{۱} & \text{لا} & \text{۰} & \text{ا}_{\text{۲}} \\ \text{۰} & \text{۰} & -\text{۱} & \text{لا} & \text{ا}_{\text{۱}} \\ \text{۰} & \text{۰} & \text{۰} & -\text{۱} & \text{ا}_{\text{۰}} \end{vmatrix}$$

عمل کرنے پر معلوم ہوگا کہ یہ مقطع چار درجی

$$\text{ا}\,\text{لا}^{4} + \text{ا}_{1}\,\text{لا}^{3} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}_{3}\,\text{لا} + \text{ا}_{4}$$

کے ساتھ متماثل ہے۔ یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے کہ کسی درجہ کا کثیر الارقام اسی شکل کے مقطع کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ا}_{1} & \text{ا}_{2} & \text{ا}_{3} & 1 \\ \text{عہ} & \text{لا} & \text{ب}_{1} & \text{ب}_{2} & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{لا} & \text{ج}_{1} & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & \text{لا} & 1 \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & \text{ضہ} & 1 \end{vmatrix} \equiv (\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})(\text{لا}-\text{ضہ})$$

جہاں ا_{1}، ا_{2}، ا_{3}، ب_{1}، ب_{2}، ج_{1} کوئی مقداریں ہیں۔

اگر ہم آخری ستون کا عہ گنا پہلے ستون میں سے، آخری ستون کا بہ گنا دوسرے ستون میں سے، وغیرہ تفریق کریں تو یہ نتیجہ حاصل ہوگا۔ طالب علم کو $(\text{ن}+1)$ ویں رتبہ کے متناظر مقطع کو لکھ لینے میں جو اُس کثیر الارقام کے مساوی ہے جسکی اصلیں عہ_{1}، عہ_{2}، عہ_{3}، ...، $\text{عہ}_{\text{ن}}$ ہیں کوئی دقت نہیں ہوگی۔

۱۸۔ حسب ذیل مقطع کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو:۔

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (\text{عہ}-\text{عہَ})^{2} & (\text{عہ}-\text{بہَ})^{2} & (\text{عہ}-\text{جہَ})^{2} \\ (\text{بہ}-\text{عہَ})^{2} & (\text{بہ}-\text{بہَ})^{2} & (\text{بہ}-\text{جہَ})^{2} \\ (\text{جہ}-\text{عہَ})^{2} & (\text{جہ}-\text{بہَ})^{2} & (\text{جہ}-\text{جہَ})^{2} \end{vmatrix}$$

یہاں

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{عہ}^{2} & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^{2} & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^{2} & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2\,\text{عہَ} & \text{عہَ}^{2} \\ 1 & -2\,\text{بہَ} & \text{بہَ}^{2} \\ 1 & -2\,\text{جہَ} & \text{جہَ}^{2} \end{vmatrix}$$

اور اِن دو مقطعوں کو دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کی طرح اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

۱۹- مقطع (57)

Δ ≡
| (عہ - عہَ)^۳ (عہ - بہَ)^۳ (عہ - جہَ)^۳ |
| (بہ - عہَ)^۳ (بہ - بہَ)^۳ (بہ - جہَ)^۳ |
| (جہ - عہَ)^۳ (جہ - بہَ)^۳ (جہ - جہَ)^۳ |

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

دو مستطیلی آراستوں

(۱)
عہ^۳ عہ^۲ عہ ۱
بہ^۳ بہ^۲ بہ ۱
جہ^۳ جہ^۲ جہ ۱

(۲)
۱ -۳ عہَ ۳ عہَ^۲ -عہَ^۳
۱ -۳ بہَ ۳ بہَ^۲ -بہَ^۳
۱ -۳ جہَ ۳ جہَ^۲ -جہَ^۳

کو ضرب دینے سے Δ چار رقموں کے مجموعہ کے مساوی ہو جاتا ہے جنمیں سے ہر ایک میں سے ہم دو مقطعوں

| ۱ عہ عہ^۲ |
| ۱ بہ بہ^۲ |
| ۱ جہ جہ^۲ |
،
| ۱ عہَ عہَ^۲ |
| ۱ بہَ بہَ^۲ |
| ۱ جہَ جہَ^۲ |

کے حاصل ضرب کو ایک جزو ضربی کے طور پر نکال سکتے ہیں۔ بقیہ جزو ضربی ہوگا

۳ {۳ عہ بہ جہ - Σ بہ جہ Σ عہَ + Σ بہَ جہَ Σ عہ - ۳ عہَ بہَ جہَ}

جس کو شکل

۳{(عہ - عہَ)(بہ - بہَ)(جہ - جہَ) + (عہ - بہَ)(بہ - جہَ)(جہ - عہَ)
+ (عہ - جہَ)(بہ - عہَ)(جہ - بہَ)}

میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

۲۰- ذیل کے پھیلاؤ کو ثابت کرو:-

$$\begin{vmatrix} 1+\text{ا}_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{ا}_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{ا}_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\text{ا}_4 \end{vmatrix} = \text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3\text{ا}_4 \left\{1+\frac{1}{\text{ا}_1}+\frac{1}{\text{ا}_2}+\frac{1}{\text{ا}_3}+\frac{1}{\text{ا}_4}\right\}$$

پہلے ستون کو باقی دوسرے ہر ستون میں سے تفریق کرنے اور پھر مقطع کو پہلے ستون کے عناصر کے ایک خطی تفاعل کے طور پر بیان کرنے سے یہ پھیلاؤ آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتا ہے۔ ثبوت کی سے یہ واضح ہو جائیگا کہ ن ویں رتبہ کے متناظر مقطع کی قیمت

$$\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3 \ldots \text{ا}_\text{ن} \left\{1+\sum \frac{1}{\text{ا}_1}\right\} \text{ ہے۔}$$

۲۱۔ ذیل کے ربط کو ثابت کرو:۔

$$\begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{لا} & \text{لا} & \text{لا} \\ \text{لا} & \text{بہ} & \text{لا} & \text{لا} \\ \text{لا} & \text{لا} & \text{جہ} & \text{لا} \\ \text{لا} & \text{لا} & \text{لا} & \text{ضہ} \end{vmatrix} = \text{ف(لا)} - \text{لا ف}'\text{(لا)}$$

جہاں

$$\text{ف(لا)} \equiv \text{(لا} - \text{عہ)(لا} - \text{بہ)(لا} - \text{جہ)(لا} - \text{ضہ)}$$

58) اسکو پچھلی مثال سے اخذ کیا جا سکتا ہے یا بلا واسطہ اسی طریقہ پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پچھلی مثال کی طرح یہاں بھی ن ویں رتبہ کا اس شکل کا مقطع متناظر شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۲۲۔ کسی مساوات کے سروں میں سے ہر ایک سر دو مقطعات کے خارج قسمت کے طور پر اصلوں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

تیسرے درجہ کی مساوات کے لئے ذیل کا جو طریق عمل درج ہے اسکی توسیع کسی درجہ کی مساوات کے لئے آسانی کے ساتھ کیجا سکتی ہے مثال ۱۰ دفعہ ۱۳۲ کی رو سے

$$\begin{vmatrix} \text{لا}^3 & \text{لا}^2 & \text{لا} & 1 \\ \text{عہ}^3 & \text{عہ}^2 & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^3 & \text{بہ}^2 & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^3 & \text{جہ}^2 & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix} \equiv -(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})$$

مقطع کو پھیلانے سے یہ متماثلہ یوں لکھی جا سکتی ہے

$$\begin{vmatrix} \text{عہ}^2 & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^2 & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^2 & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix}\text{لا}^3 - \begin{vmatrix} \text{عہ}^3 & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^3 & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^3 & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix}\text{لا}^2 + \begin{vmatrix} \text{عہ}^3 & \text{عہ}^2 & 1 \\ \text{بہ}^3 & \text{بہ}^2 & 1 \\ \text{جہ}^3 & \text{جہ}^2 & 1 \end{vmatrix}\text{لا}$$

$$- \begin{vmatrix} \text{عہ}^3 & \text{عہ}^2 & \text{عہ} \\ \text{بہ}^3 & \text{بہ}^2 & \text{بہ} \\ \text{جہ}^3 & \text{جہ}^2 & \text{جہ} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{عہ}^2 & \text{عہ} & 1 \\ \text{بہ}^2 & \text{بہ} & 1 \\ \text{جہ}^2 & \text{جہ} & 1 \end{vmatrix}\left\{\text{لا}^3 - \text{ب}_1\text{لا}^2 + \text{ب}_2\text{لا} - \text{ب}_3\right\}$$

جس سے اوپر کا مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔ ب_1، ب_2، ب_3 اُس مساوات کے سر ہیں جس کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔

۲۳ — چار درجی کے محول کعبی کو ایک مقطع کے طور پر بیان کرو۔ متماثلہ

$$\text{ا}_0\text{لا}^4 + 4\,\text{ا}_1\text{لا}^3 + 6\,\text{ا}_2\text{لا}^2 + 4\,\text{ا}_3\text{لا} + \text{ا}_4$$

$$\equiv (\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ب}\,\text{لا} + \text{ج})(\text{اَ}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{بَ}\,\text{لا} + \text{جَ})$$

سے حاصل ہونیوالی مساواتوں کو لکھ لینے، $6\,\text{ا}_0\,\text{فہ} \equiv \text{ا}\,\text{جَ} + \text{اَ}\,\text{ج} - 2\,\text{ب}\,\text{بَ}$ مان لینے، اور متماثلہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{اَ} & 0 \\ \text{ب} & \text{بَ} & 0 \\ \text{ج} & \text{جَ} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{اَ} & \text{ا} & 0 \\ \text{بَ} & \text{ب} & 0 \\ \text{جَ} & \text{ج} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 2\,\text{ا}\,\text{اَ} & \text{ا}\,\text{بَ} + \text{اَ}\,\text{ب} & \text{ا}\,\text{جَ} + \text{اَ}\,\text{ج} \\ \text{ا}\,\text{بَ} + \text{اَ}\,\text{ب} & 2\,\text{ب}\,\text{بَ} & \text{ب}\,\text{جَ} + \text{بَ}\,\text{ج} \\ \text{ا}\,\text{جَ} + \text{اَ}\,\text{ج} & \text{ب}\,\text{جَ} + \text{بَ}\,\text{ج} & 2\,\text{ج}\,\text{جَ} \end{vmatrix}$$

میں اندراجات کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۲} + ۲\,\text{ا}_{۰}\,\text{فه} & \text{ا}_{۱} & \text{ا}_{۰} \\ \text{ا}_{۳} & \text{ا}_{۲} - \text{ا}_{۰}\,\text{فه} & \text{ا}_{۱} \\ \text{ا}_{۴} & \text{ا}_{۳} & \text{ا}_{۲} + ۲\,\text{ا}_{۰}\,\text{فه} \end{vmatrix} = ۰$$

حاصل کر لیتے ہیں جس کو پھیلا کر یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ یہ مساوات معیاری محول کعبی کے مماثل ہے ۔

(59) ۲۴ ۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ایک چار درجی جملہ دو چوتھی قوتوں کے مجموعہ کے طور پر بیان ہو سکے اور اسکو شکل

$$\text{ا لا}^{۴} + ۴\,\text{ب لا}^{۳} + ۶\,\text{ج لا}^{۲} + ۴\,\text{د لا} + \text{ع} \equiv \text{ل}\,(\text{لا} + \text{طه})^{۴} + \text{م}\,(\text{لا} + \text{فه})^{۴}$$

میں بیان کر کے وہ دو درجی معلوم کرو جسکی اصلیں طه اور فه ہیں ۔

اوپر کی متماثلہ سے ذیل کی مساواتیں ملتی ہیں :-

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ل} + \text{م} = \text{ا} \\ \text{ل طه} + \text{م فه} = \text{ب} \\ \text{ل طه}^{۲} + \text{م فه}^{۲} = \text{ج} \\ \text{ل طه}^{۳} + \text{م فه}^{۳} = \text{د} \\ \text{ل طه}^{۴} + \text{م فه}^{۴} = \text{ع} \end{array} \right. \qquad (۱)$$

فرض کرو کہ $\text{له} + \text{مه لا} + \text{نه لا}^{۲} = ۰$ وہ مساوات ہے جسکی اصلیں طه اور فه ہیں ۔ تب ہمیں ذیل کی تین مساواتیں حاصل ہونگی :-

$$\text{له ا} + \text{مه ب} + \text{نه ج} = ۰$$
$$\text{له ب} + \text{مه ج} + \text{نه د} = ۰$$
$$\text{له ج} + \text{مه د} + \text{نه ع} = ۰$$

اور ان سے مطلوبہ شرط $\text{ح} \equiv ۰$ فوراً مل جائیگی ۔ پھر پہلی دو مساواتوں اور مفروضہ مساوات کو ایک ساتھ لینے سے ذیل کا دو درجی حاصل ہوگا جسکی اصلیں طه اور فه ہیں :-

$$\begin{vmatrix} \text{لا}^{۲} & \text{لا} & ۱ \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{د} & \text{ج} & \text{ب} \end{vmatrix} = ۰$$

اگر کعبی کو دو مکعبوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کرنا مقصود ہو یعنی شکل ل (لا + طہ)^{۳} + م (لا + فہ)^{۳} میں تو اوپر کی مساواتوں (۱) میں سے پہلی چار مساواتوں سے طہ اور فہ کے لئے وہی دو درجی حاصل ہوگا۔

۲۵ — چار درجی

ا (لا + عہ)^{۴} + ب (لا + بہ)^{۴} + ج (لا + جہ)^{۴} + د (لا + ضہ)^{۴} = ۰

کے لئے ثابت کرو

ھ = Σ ا ب (عہ − بہ)^{۲}

ع = Σ ا ب (عہ − بہ)^{۴}

جے = Σ ا ب ج (عہ − بہ)^{۲} (عہ − جہ)^{۲} (بہ − جہ)^{۲}

یہ جملے اُس چار درجی کے لئے درست ہیں جو چوتھی قوتوں کی کسی تعداد کے مجموعہ کے طور پر لکھا گیا ہو۔ اگر اسکو صرف دو کے مجموعہ کے طور پر لکھا جائے تو جے = ۔ کیونکہ صرف ا اور ب باقی رہتے ہیں اور اگر وہ صرف ایک چوتھی قوت پر تحویل ہو جائے تو ھ، ع، جے سب کے سب معدوم ہو جاتے ہیں جسکو ہم پہلے ہی دوسرے طریقوں سے حاصل کر چکے ہیں۔

۲۶ — اُس چوتھے رتبہ کے مقطع پر بحث کرو جسکے عناصر (عہ − عہَ)^{۴}، (عہ − بہَ)^{۴} وغیرہ مثال ۱۹ صفحہ ۸۸ کی طرح ترتیب دئے گئے ہیں۔ اور اگر دو دی ہوئی چار درجی مساواتوں کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ، عہَ، بہَ، جہَ، ضہَ ہوں تو ثابت کرو کہ اگر مقطع کی قیمت کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو اس میں جملہ

اعَ + اَع + ۶ ج جَ − ۴ (ب دَ + بَ د)

جزو ضربی کے طور پر شامل ہوتا ہے۔ جب دونوں چار درجی مماثل ہوں تو یہ جزو ضربی ۲ ع ہو جاتا ہے۔

۲۷ — وہ شرط معلوم کرو کہ تین متغیروں کا متجانس دو درجی تفاعل (60)

ا لا² + ب ما² + ج ی² + ۲ف ما ی + ۲گ ی لا + ۲ھ لا ما

دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے۔

دئے ہوئے تفاعل کو دو اجزائے کے حاصل ضرب

(عہ لا + بہ ما + جہ ی)(عہَ لا + بہَ ما + جہَ ی)

کے مساوی رکھنے سے ہم آسانی کے ساتھ معلوم کر لیتے ہیں کہ

عہ عہَ ۰		عہَ عہ ۰			ا ھ گ
بہ بہَ ۰	×	بہَ بہ ۰	= ۸		ھ ب ف
جہ جہَ ۰		جہَ جہ ۰			گ ف ج

اس لئے مطلوبہ شرط یہ ہے کہ یہ آخری مقطع معدوم ہو جائے

۲۸ — ثابت کرو کہ لا، ما، ی، و کی عام سے عام قیمتیں جو دو متجانس مساواتوں

ا لا + ب ما + ج ی + د و = ۰، اَ لا + بَ ما + جَ ی + دَ و = ۰

کو پورا کرتی ہیں دو نامعلوم لا، ما کی رقوم میں حسب ذیل طریقہ پر

(ا بَ)(ا جَ)، (ا دَ) لا = ا لا + اَ ما،

(ب اَ)(ب جَ)(ب دَ) ما = ب لا + بَ ما، وغیرہ

متناکلاً بیان کیجا سکتی ہیں۔

اسکو ثابت کرنے کے لئے دی ہوئی مساواتوں کے ساتھ حسب ذیل دو مساواتیں اضافہ کرو:۔

ا²/اَ لا + ب²/بَ ما + ج²/جَ ی + د²/دَ و = لہ،

اَ²/ا لا + بَ²/ب ما + جَ²/ج ی + دَ²/د و = مہ،

جہاں لہ اور مہ غیر معین مقداریں ہیں۔ ان چار مساواتوں کے ذریعہ لا، ما، ی، و کی قیمتیں دفعہ ۴۴ کی طرح معلوم کرو اور مقطعوں کو مثال ۱۲ صفحہ کی طرح تحویل کرو اور بالآخر لا = اَ بَ جَ دَ لہ، ما = ا ب ج د مہ رکھو۔

۲۹ ۔ اگر کسی مقطع میں لا = ا رکھنے سے ر ستون (یا صف) متماثل ہو جائیں تو مقطع میں ایک جزو ضربی $(\text{لا} - \text{ا})^{\text{ر}-1}$ ہے۔

دئے ہوئے مقطع میں اِن ر ستونوں میں سے ایک ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کرنے سے یہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔ حاصل ہونیوالے (ر - ۱) ستونوں میں سے ہر ایک میں لا - ا جزو ضربی کے طور پر شریک ہونا چاہئے کیونکہ بموجب فرض اس کا ہر عنصر لا = ا رکھنے سے معدوم ہو جاتا ہے۔

۳۰ ۔ ن ویں رتبہ کے مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ا} & \text{ا} & \cdot & \cdot & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{لا} & \text{ا} & \cdot & \cdot & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ا} & \text{لا} & \cdot & \cdot & \text{ا} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} & \cdot & \cdot & \text{لا} \end{vmatrix}$$

کی قیمت معلوم کرو جس کے صدر عناصر سب کے سب لا کے مساوی ہیں اور باقی سب عناصر ا کے۔

(61) پچھلی مثال کی رو سے Δ میں $(\text{لا} - \text{ا})^{\text{ن}-1}$ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے اور تمام ستونوں کو جمع کرنے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا + (ن - ۱) ا بھی اس مقطع کا ایک جزو ضربی ہونا چاہئے۔ پس اِن دونوں اجزاء کے حاصل ضرب اور Δ میں صرف ایک عددی جزو ضربی کا فرق ہو سکتا ہے چنانچہ حاصل ضرب کا صدر رقم کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\Delta = (\text{لا} - \text{ا})^{\text{ن}-1} \left\{ \text{لا} + (\text{ن} - 1)\,\text{ا} \right\}$$

اس نتیجہ کو مثال ۲۹ کی مدد کے بغیر بالراست ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۳۱ ۔ مقطع

ف$_{1}$ (عہ)	ف$_{2}$ (عہ)	ف$_{3}$ (عہ)
ف$_{1}$ (بہ)	ف$_{2}$ (بہ)	ف$_{3}$ (بہ)
ف$_{1}$ (جہ)	ف$_{2}$ (جہ)	ف$_{3}$ (جہ)

میں جس میں ف$_{1}$، ف$_{2}$، ف$_{3}$ کوئی منطق صحیح تفاعل ہیں ایک جزو ضربی (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ) شامل ہے ۔

یہ اسی طرح کے استدلال سے حاصل ہو جاتا ہے جو مثال ۲۹ میں کیا گیا ہے ۔ اس نوعیت کے مقطع جنمیں کسی ستون (یا صف) کے عناصر ایک ہی شکل کے تفاعل ہوتے ہیں اور کسی صف (ستون) کے عناصر میں ایک ہی مقدار شامل ہوتی ہے متبادلات (Alternants) کہلاتے ہیں

ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ عام ہے اور کسی رتبہ کے متبادلہ میں شامل ہونیوالی سب مقداروں کے فرقوں کا حاصل ضرب ایک جزو ضربی کے طور پر شامل ہوتا ہے ۔ دفعہ ۱۳۲ کے امثلہ ۹، ۱۰ اور دفعہ ۱۴۰ کے امثلہ ۱۱، ۱۲ سادہ ترین شکل کے متبادلات ہیں۔

۳۲- پچھلی مثال کے متبادلہ کو فرقوں کے حاصل ضرب سے تقسیم کر کے خارج قسمت کو ایک مقطع کی شکل میں بیان کرو ۔

توجہ کو قایم کرنے کی خاطر مان لو کہ شامل ہونیوالے تفاعلوں میں سے ہر ایک تفاعل پانچویں درجہ کا ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں

ف$_{1}$(عہ) ≡ ا$_{1}$ عہ^{5} + ب$_{1}$ عہ^{4} + ج$_{1}$ عہ^{3} + د$_{1}$ عہ^{2} + ع$_{1}$ عہ + ک$_{1}$ ،

ف$_{2}$(عہ) ≡ ا$_{2}$ عہ^{5} + ب$_{2}$ عہ^{4} + ج$_{2}$ عہ^{3} + د$_{2}$ عہ^{2} + ع$_{2}$ عہ + ک$_{2}$ ،

ف$_{3}$(عہ) ≡ ا$_{3}$ عہ^{5} + ب$_{3}$ عہ^{4} + ج$_{3}$ عہ^{3} + د$_{3}$ عہ^{2} + ع$_{3}$ عہ + ک$_{3}$ ،

اب مساوات

لا^{3} + ف لا^{2} + ق لا + ر = ۰

کی اصلوں کو عہ، بہ، جہ لینے اور مقطعوں

عہ^{5}	عہ^{4}	عہ^{3}	عہ^{2}	عہ	۱
بہ^{5}	بہ^{4}	بہ^{3}	بہ^{2}	بہ	۱
جہ^{5}	جہ^{4}	جہ^{3}	جہ^{2}	جہ	۱
٠	٠	۱	٠	٠	٠
٠	۱	٠	٠	٠	٠
۱	٠	٠	٠	٠	٠

ا$_{1}$	ب$_{1}$	ج$_{1}$	د$_{1}$	ع$_{1}$	ک$_{1}$
ا$_{2}$	ب$_{2}$	ج$_{2}$	د$_{2}$	ع$_{2}$	ک$_{2}$
ا$_{3}$	ب$_{3}$	ج$_{3}$	د$_{3}$	ع$_{3}$	ک$_{3}$
٠	٠	ا	ف	ق	ر
٠	ا	ف	ق	ر	٠
ا	ف	ق	ر	٠	٠

کا حاصل ضرب بنانے سے یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ یہ آخری مقطع مطلوبہ خارج قسمت ہے۔

جب متبادلہ کسی رتبہ کا ہو اور ف$_{1}$، ف$_{2}$، ف$_{3}$ وغیرہ کسی درجہ کے منطق صحیح تفاعل ہوں تو بالکل ایسا ہی طریقہ خارج قسمت کے معلوم کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۳۲۔ حسب ذیل مقطع کو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو:۔ (62)

ا$_{1}$	ا$_{2}$	ا$_{3}$	ا$_{4}$	ا$_{5}$
ا$_{5}$	ا$_{1}$	ا$_{2}$	ا$_{3}$	ا$_{4}$
ا$_{4}$	ا$_{5}$	ا$_{1}$	ا$_{2}$	ا$_{3}$
ا$_{3}$	ا$_{4}$	ا$_{5}$	ا$_{1}$	ا$_{2}$
ا$_{2}$	ا$_{3}$	ا$_{4}$	ا$_{5}$	ا$_{1}$

سب صفوں میں عناصر وہی پانچ مقداریں ہیں جو دائری ترتیب میں لی گئی ہیں، ہر صف میں پہلا عنصر مختلف ہے۔ اس قسم کے مقطع کو ہم

مستدیرہ کہینگے۔ مندرجۂ بالا شکل میں مستدیرہ کا لکھنا آسان ہے یعنی اس طور پر کہ ایک ہی عنصر وتری محل میں ہر جگہ واقع ہو چنانچہ مقطع بالا میں ا_1 ۔ مساوات $\text{لا}^5 - 1 = 0$ کی کسی اصل کو طہ سے تعبیر کرو اور پہلے ستون کو چھوڑ کر باقی دوسرے ستونوں کو علی الترتیب طہ، طہ^2، طہ^3، طہ^4 سے ضرب دو۔ پھر پہلے ستون میں باقی دوسرے ستونوں کے عناصر کا مجموعہ جمع کرو تو معلوم ہو گا کہ مقطع کے اجزائے ضربی حسب ذیل ہیں :۔

$$\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4 + \text{ا}_5$$

$$\text{ا}_1 + \text{طہ}\,\text{ا}_2 + \text{طہ}^2\,\text{ا}_3 + \text{طہ}^3\,\text{ا}_4 + \text{طہ}^4\,\text{ا}_5$$

$$\text{ا}_1 + \text{طہ}^2\,\text{ا}_2 + \text{طہ}^4\,\text{ا}_3 + \text{طہ}\,\text{ا}_4 + \text{طہ}^3\,\text{ا}_5$$

$$\text{ا}_1 + \text{طہ}^3\,\text{ا}_2 + \text{طہ}\,\text{ا}_3 + \text{طہ}^4\,\text{ا}_4 + \text{طہ}^2\,\text{ا}_5$$

$$\text{ا}_1 + \text{طہ}^4\,\text{ا}_2 + \text{طہ}^3\,\text{ا}_3 + \text{طہ}^2\,\text{ا}_4 + \text{طہ}\,\text{ا}_5$$

جہاں مساوات $\text{لا}^5 - 1 = 0$ کی پانچ اصلیں ۱، طہ، طہ^2، طہ^3، طہ^4 ہیں۔ دونوں جملوں میں ا_1^5 کے سر کا مقابلہ کرنے سے یہ معلوم ہو گا کہ عددی جزو ضربی اکائی ہے (دیکھو مثال ۱۳ دفعہ ۱۴)۔ کسی رتبہ کے مستدیرہ پر اسی طرح کا طریق عمل جاری کیا جا سکتا ہے۔

۳۴ ــ ایک ہی رتبہ کے دو مستدیرات کا حاصل ضرب ایک مستدیرہ ہوتا ہے۔

۳۵ ــ ن ویں رتبہ کا مقطع

$$\Delta_{\text{ن}} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{ن}} & \text{ب}_{\text{ن}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \text{ا}_{\text{ن}-1} & \text{ب}_{\text{ن}-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \text{ا}_{\text{ن}-2} & \text{ب}_{\text{ن}-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \text{ا}_{\text{ن}-3} & \text{ب}_{\text{ن}-3}\ \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \end{vmatrix}$$

محسوب کرو جس میں تمام عناصر صفر ہیں سوائے اُن کے جو وتر اور اُن خطوط میں واقع ہیں جو وتر کے دونوں طرف اس کے متوازی اور اس کے متصل ہیں ۔ انمیں سے ایک خط ایسے عناصر پر مشتمل ہے جنمیں سے ہر ایک - ۱ کے مساوی ہے ۔

پہلے ستون کی رقوم میں پھیلانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ زیر بحث مقطع کی قسم کے تین مقطعوں میں جنکے رتبے ن، ن - ۱، ن - ۲ ہیں ذیل کا رشتہ ہے :-

$$\Delta_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\,\Delta_{\text{ن}-1} + \text{ب}_{\text{ن}}\,\Delta_{\text{ن}-2}$$

اس رشتہ کی مدد سے سلسلہ $\Delta_{\text{ن}}$، $\Delta_{\text{ن}-1}$، $\Delta_{\text{ن}-2}$، ....، Δ_2، Δ_1 میں (63)
سے کسی مقطع کو اس سے نچلے رتبہ کے دو مقطعوں میں تحویل کیا جا سکتا ہے اور ظاہر ہے کہ Δ_1 اور Δ_2 کی قیمتیں صریحًا ا_1 اور $\text{ا}_2\,\text{ا}_1 + \text{ب}_2$ ہیں ۔

اوپر کی مساوات کو $\Delta_{\text{ن}-1}$ سے تقسیم کیا جائے تو

$$\frac{\Delta_{\text{ن}}}{\Delta_{\text{ن}-1}} = \text{ا}_{\text{ن}} + \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\dfrac{\Delta_{\text{ن}-1}}{\Delta_{\text{ن}-2}}}$$

پھر $\Delta_{\text{ن}-1}$ کو $\Delta_{\text{ن}-2}$ سے تقسیم کرنے پر جو خارج قسمت ملتا ہے اسکی بجائے اسی طرح کی قیمت درج کیجائے اور اس عمل کو جاری رکھا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ کسی مقطع کو اس سے عین نچلے رتبہ کے مقطع سے تقسیم کرنے پر جو خارج قسمت ملتا ہے وہ دئے ہوئے عناصر کی رقوم میں ایک مسلسل کسر کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے ۔ اس خاصیت کی بناء پر زیر بحث شکل کے مقطعوں کو ہم **مسلسلات** کہینگے ۔ جب عناصر $\text{ب}_{\text{ن}}$، $\text{ب}_{\text{ن}-1}$، $\text{ب}_{\text{ن}-2}$، . . . . ، ب_3، ب_2 (جو وتر کے اوپر والے خط میں واقع ہیں)

میں سے ہر ایک + ۱ کے مساوی ہو تو حاصل ہونیوالا مقطع سادہ مسلسلہ ہے۔

۳۶ ـــ ن ویں رتبہ کے مقطع

$$\Delta_{\text{ن}} \equiv \begin{vmatrix} \text{عہ} & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \text{بہ} & \text{عہ} & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \text{بہ} & \text{عہ} & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \text{بہ} & \text{عہ} & ۱ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

کو محسوب کرو جبکہ وہ عناصر جو صفر نہیں ہوتے صرف عہ، بہ، ۱ ہیں جو وتر اور اسکے متصل اور متوازی خطوط میں واقع ہوتے ہیں جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہے۔

ن کی کسی مخصوص قیمت کے لئے مقطع کو پچھلی مثال کے طریقہ کی بموجب مساوات

$$\Delta_{\text{ن}} = \text{عہ}\,\Delta_{\text{ن}-۱} - \text{بہ}\,\Delta_{\text{ن}-۲}$$

کی مدد سے فوراً محسوب کیا جا سکتا ہے۔ یہاں $\Delta_{۱}$ اور $\Delta_{۲}$ کی قیمتیں علی الترتیب عہ اور $\text{عہ}^{۲} - \text{بہ}$ ہیں۔

Δ کی متواتر قیمتوں کی ساخت پر غور کرنے سے طالب علم کو فوراً معلوم ہو جائیگا کہ نتیجہ میں شامل ہونیوالی ارقام جبکہ ن جفت اور ۲ر کے مساوی ہو یہ ہیں

$$\text{عہ}^{۲\text{ر}},\ \text{عہ}^{۲\text{ر}-۲}\,\text{بہ},\ \text{عہ}^{۲\text{ر}-۴}\,\text{بہ}^{۲},\ \ldots\ldots,\ \text{عہ}^{۲}\,\text{بہ}^{\text{ر}-۱},\ \text{بہ}^{\text{ر}}$$

اگر ن طاق اور ۲ر + ۱ کے مساوی ہے تو ارقام ہیں

$$\text{عہ}^{۲\text{ر}+۱},\ \text{عہ}^{۲\text{ر}-۱}\,\text{بہ},\ \text{عہ}^{۲\text{ر}-۳}\,\text{بہ}^{۲},\ \ldots\ldots,\ \text{عہ}^{۳}\,\text{بہ}^{\text{ر}-۱},\ \text{عہ}\,\text{بہ}^{\text{ر}}$$

آئندہ تحقیقات کے لئے جنمیں متذکرۂ صدر نتائج سے فائدہ اٹھایا جائیگا یہ ضروری نہیں ہے کہ ان جملوں میں داخل ہونیوالے عددی سروں کی عام شکلوں سے واقفیت حاصل کیجائے۔ لیکن ایسی اشکال بغیر دقت کے

معلوم کیجا سکتی ہیں اور $\Delta_{\text{ن}}$ کے لئے حسب ذیل عام جملہ حاصل کیا جا سکتا ہے:-

$$\Delta_{\text{ن}} = \text{عہ}^{\text{ن}} - (\text{ن}-1)\,\text{عہ}^{\text{ن}-2}\,\text{بہ} + \frac{(\text{ن}-3)(\text{ن}-2)}{1\times 2}\,\text{عہ}^{\text{ن}-4}\,\text{بہ}^{2}$$

$$- \frac{(\text{ن}-5)(\text{ن}-4)(\text{ن}-3)}{1\times 2\times 3}\,\text{عہ}^{\text{ن}-6}\,\text{بہ}^{3} + \cdots\cdots\cdots$$

۳۷- اگر ایک کثیر الارقام ع کو کمتر ابعاد کے دوسرے کثیر الارقام عَ سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت کے اور باقی کے سروں کو ع اور عَ کے سروں کی رقوم میں مقطعات کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ (64)

ذیل کی مخصوص صورت میں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے وہ عام صورت میں بھی آسانی کے ساتھ اطلاق پذیر ہے۔ فرض کرو کہ ع پانچویں درجہ کا ہے اور عَ تیسرے درجہ کا۔ خارج قسمت اور باقی کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:-

$$\text{ق} \equiv \text{ق}_{.}\,\text{لا}^{2} + \text{ق}_{1}\,\text{لا} + \text{ق}_{2}\,,\quad \text{ر} \equiv \text{ر}_{.}\,\text{لا}^{2} + \text{ر}_{1}\,\text{لا} + \text{ر}_{2}$$

نیز فرض کرو کہ

$$\text{ع} \equiv \text{ا}_{.}\,\text{لا}^{5} + \text{ا}_{1}\,\text{لا}^{4} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{3} + \text{ا}_{3}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}_{4}\,\text{لا} + \text{ا}_{5}\,,\quad \text{عَ} \equiv \text{اَ}_{.}\,\text{لا}^{3} + \text{اَ}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{اَ}_{2}\,\text{لا} + \text{اَ}_{3}$$

$$\text{متماثلہ}\quad \text{ع} \equiv \text{ق}\,\text{عَ} + \text{ر}$$

سے ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں:-

$$\text{ا}_{.} = \text{ق}_{.}\,\text{اَ}_{.}$$

$$\text{ا}_{1} = \text{ق}_{.}\,\text{اَ}_{1} + \text{ق}_{1}\,\text{اَ}_{.}$$

$$\text{ا}_{2} = \text{ق}_{.}\,\text{اَ}_{2} + \text{ق}_{1}\,\text{اَ}_{1} + \text{ق}_{2}\,\text{اَ}_{.}$$

$$\text{ا}_{3} = \text{ق}_{.}\,\text{اَ}_{3} + \text{ق}_{1}\,\text{اَ}_{2} + \text{ق}_{2}\,\text{اَ}_{1} + \text{ر}_{.}$$

$$\text{ا}_{4} = \text{ق}_{1}\,\text{اَ}_{3} + \text{ق}_{2}\,\text{اَ}_{2} + \text{ر}_{1}$$

$$\text{ا}_{5} = \text{ق}_{2}\,\text{اَ}_{3} + \text{ر}_{2}$$

دفعہ ۴۴ا کی بموجب حل کرنے سے $ق_{.}$، $ق_{۱}$، $ق_{۲}$ کو پہلی تین مساواتوں کے ذریعہ مقطعات کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ اور پہلی تین مساواتوں کے ساتھ باری باری سے باقی ہر ایک مساوات کو لینے سے $ر_{.}$، $ر_{۱}$، $ر_{۲}$ متعین ہو سکتے ہیں۔ مثلاً $ر_{.}$ معلوم کرنیکے لئے پہلی چار مساواتوں سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\begin{vmatrix} اَ_{.} & ۰ & ۰ & -ا_{.} \\ اَ_{۱} & اَ_{.} & ۰ & -ا_{۱} \\ اَ_{۲} & اَ_{۱} & اَ_{.} & -ا_{۲} \\ اَ_{۳} & اَ_{۲} & اَ_{۱} & -ا_{۳}+ر_{.} \end{vmatrix} = ۰ \quad \text{یعنی} \quad اَ_{.}^{۳} ر_{.} = \begin{vmatrix} اَ_{.} & ۰ & ۰ & ا_{.} \\ اَ_{۱} & اَ_{.} & ۰ & ا_{۱} \\ اَ_{۲} & اَ_{۱} & اَ_{.} & ا_{۲} \\ اَ_{۳} & اَ_{۲} & اَ_{۱} & ا_{۳} \end{vmatrix}$$

۳۸۔ اگر جفت درجہ ۲م کے ایک کثیر الارقام کو ایک دو درجی سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت کے اور باقی کے سروں کی عام اشکال معلوم کرد دئے ہوئے دو درجی کو $لا^{۲} + عہ\,لا + بہ$ لینے سے ہمیں متماثلہ ملتی ہے

$$ا_{.}\,لا^{۲م} + ا_{۱}\,لا^{۲م-۱} + ا_{۲}\,لا^{۲م-۲} + \dots + ا_{۲م-۲}\,لا^{۲} + ا_{۲م-۱}\,لا + ا_{۲م}$$

$$\equiv (ق_{.}\,لا^{۲م-۲} + ق_{۱}\,لا^{۲م-۳} + \dots + ق_{۲م-۳}\,لا + ق_{۲م-۲})(لا^{۲} + عہ\,لا + بہ)$$

$$+ ر_{.}\,لا + ر_{۱}$$

اب $ق_{.}$، $ق_{۱}$، $ق_{۲}$، ...، $ق_{ر}$ کو حاصل کرنیکے لئے پچھلی مثال کی طرح پہلی $(ر + ۱)$ مساواتوں کو لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ان مساواتوں سے اخذ کردہ $ق_{ر}$ کی قیمت، رویں رتبہ کا ایک مقطع ہے جسکی شکل مثال ۳۶ کے مقطع جیسی ہے اور اسکا اوپر کا حاشیہ عناصر $ا_{.}$، ...، ...، $ا_{ر}$ پر مشتمل ہے اور بائیں طرف کا حاشیہ عناصر $ا_{.}$، $ا_{۱}$، ...، $ا_{ر}$ ہے۔ اس مقطع کو آخری ستون کی رقوم میں پھیلانے سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ کوئی خارج قسمت مثال ۳۶ کے مقطعات کے ایک سلسلہ کے ذریعہ شکل ذیل میں بیان ہوتا ہے:-

$$\text{ق}_{\text{ر}} = \text{ا}_{\text{ر}} - \text{ا}_{\text{ر}-۱}\,\Delta_{۱} + \text{ا}_{\text{ر}-۲}\,\Delta_{۲} - \ldots\ldots \mp \text{ا}_{۱}\,\Delta_{\text{ر}-۱} \pm \Delta_{\text{ر}}$$ (64)

جہاں اوپر کی یا نیچے کی علامت لینی چاہیئے بموجب اسکے کہ ر جفت یا طاق ہو۔ باقی کے سروں کو حاصل کرنے کے لئے مساواتیں ہیں

$$\text{ب}\,\text{ق}_{۲\text{م}-۳} + \text{عہ}\,\text{ق}_{۲\text{م}-۲} + \text{ر}_{۰} = \text{ا}_{۲\text{م}-۱}$$

$$\text{ب}\,\text{ق}_{۲\text{م}-۲} + \text{ر}_{۱} = \text{ا}_{۲\text{م}}$$

$\text{ق}_{۲\text{م}-۳}$ ، $\text{ق}_{۲\text{م}-۲}$ کی قیمتوں کو اوپر کے ثابت شدہ ضابطہ سے بیان کرنے اور مثال ۳۶ کے نتیجوں کو پیش نظر رکھنے سے ہمیں $\text{ر}_{۰}$ اور $\text{ر}_{۱}$ کے لئے حسب ذیل عام اشکال حاصل ہوتی ہیں :-

$$\text{ر}_{۰} = \text{ا}_{۲\text{م}-۱} + \text{ا}_{۲\text{م}-۳}\,\text{ب} + \text{ا}_{۲\text{م}-۵}\,\text{ب}^{۲} + \ldots\ldots + \text{ا}_{۳}\,\text{ب}^{\text{م}-۲} + \text{ا}_{۱}\,\text{ب}^{\text{م}-۱}$$

$$\text{ر}_{۱} = \text{ا}_{۲\text{م}} + \text{ب}_{۲\text{م}-۲}\,\text{ب} + \text{ب}_{۲\text{م}-۴}\,\text{ب}^{۲} + \ldots\ldots + \text{ب}_{۲}\,\text{ب}^{\text{م}-۱} + \text{ب}\,\text{ب}^{\text{م}}$$

جنمیں سر ا، ب سب کے سب عہ کے تفاعل ہیں اور کسی سر ا یا ب میں عہ کی بڑی سی بڑی قوت اُس لاحقہ سے تعبیر کیگئی ہے جو اسکے سر کے ساتھ لگایا گیا ہے۔

۳۹ — اگر ایک متشاکل مقطع کے صدر عناصر میں سے ہر ایک میں ایک ہی مقدار لا کا اضافہ کیا جائے تو اس طور پر حاصل شدہ مقطع کو صفر کے مساوی رکھنے سے لا میں جو مساوات ملتی ہے اسکی سب اصلیں حقیقی ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ زیر بحث ن ویں رتبہ کا متشاکل مقطع $\Delta_{\text{ن}}$ سے تعبیر ہوتا ہے اور شکل

$\Delta_{ن} \equiv$

ا + لا	ھ	گ	.	.
ھ	ب + لا	ف	.	.
گ	ف	ج + لا	.	.
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

میں لکھا گیا ہے۔

فرض کرو کہ پہلی صف اور پہلے ستون کو خارج کر دینے سے جو مقطع حاصل ہوتا ہے اسکو یعنے $\Delta_{ن}$ کے پہلے صدر صغیر کو $\Delta_{ن-۱}$ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ اسی طرح $\Delta_{ن-۱}$ کا پہلا صدر صغیر $\Delta_{ن-۲}$ سے تعبیر ہوتا ہے اور $\Delta_{ن-۲}$ کا پہلا صدر صغیر $\Delta_{ن-۳}$ سے اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طور پر حاصل کردہ آخری تفاعل $\Delta_{۱}$، ل + لا شکل کا ہوگا۔ ان مقطعوں کے ساتھ ہم ایک اور مقطع $\Delta_{۰}$ = ۱ لیتے ہیں جسکے متعلق یہ تصور کیا جا سکتا ہے کہ وہ صغیروں کے سلسلہ کو مکمل کرتا ہے اور اسی طرح کے عمل سے حاصل ہوا ہے کیونکہ $\Delta_{ن}$ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اگر ہم ایک صف اور ایک ستون کا ایسا حاشیہ لگا دیں جو بالکلیہ صفر عنصروں پر مشتمل ہو سوا ایک عنصر + ۱ کے جو صدر وتر میں واقع ہوتا ہے۔ اب ہمیں ن + ۱ تفاعلوں کا یہ سلسلہ ملیگا

$\Delta_{ن}$، $\Delta_{ن-۱}$، $\Delta_{ن-۲}$، ...، $\Delta_{۲}$، $\Delta_{۱}$، $\Delta_{۰}$

جنکے درجے (لا میں) لاحقوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔ جب اس سلسلہ میں لا کی بجائے $+\infty$ درج کیا جاتا ہے تو علامتیں سب کی سب مثبت ملتی ہیں اور جب $-\infty$ درج کیا جاتا ہے تو علامتیں (Δ سے شروع کرکے) متبادلاً مثبت اور منفی ہیں۔ پس اگر لا کو مسلسل بڑھتا ہوا تصور کیا جائے تو لا کے $-\infty$ سے $+\infty$ تک جانے میں اس سلسلہ میں علامت کی

ن تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں ۔ اب دفعہ ۱۴۹ کے مسئلہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ لا کی وہ قیمت جو اس سلسلہ کے کسی تفاعل کو ($\Delta_{ن}$ ، Δ. کو چھوڑ کر) صفر بناتی ہے اس تفاعل کے دونوں طرف کے متصل تفاعلوں کو مختلف العلامت کر دیتی ہے ۔ Δ. اپنی علامت برقرار رکھتا ہے ۔ پس دفعہ ۹۶ ، (۲) کی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ علامت کی کوئی تبدیلی کم نہیں ہو سکتی سوائے اس صورت کے جب ، لا ، $\Delta_{ن}$ = ۰ کی ایک حقیقی اصل میں سے گذرے ۔ اسلئے اس مساوات کی ن حقیقی اصلیں موجود ہونی چاہئیں تاکہ $-\infty$ سے $+\infty$ تک گذرنے میں علامت کی ن تبدیلیاں کم ہو سکیں ۔

اس سلسلہ کی کوئی مساوات چونکہ اُسی شکل کی ہے جو شکل کہ $\Delta_{ن}$ = ۰ (66)
کی ہے اس لئے اسکی تمام اصلیں حقیقی ہیں ۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ان میں سے ہر مساوات (سلسلہ میں) اپنے سے اوپر کی مساوات کے حوالے سے ایک انتہائی مساوات ہے ۔ کیونکہ $\Delta_{ن}$ کی ہر دو متصلہ اصلوں میں سے گزرنے میں $\Delta_{ن}$ اور $\Delta_{ن-۱}$ کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہونیکے لئے $\Delta_{ن-۱}$ کی قیمت کو لا کی ان قیمتوں کے درمیان علامت بدلنی چاہئے ۔

مساوات $\Delta_{ن}$ = ۰ میں مساوی اصلیں ہو سکتی ہیں اور جو کچھ اوپر ثابت ہوا اُس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب اس مساوات کی ر اصلیں ع کے مساوی ہوں تو مساوات $\Delta_{ن-۱}$ = ۰ کی (ر - ۱) اصلیں ع کے مساوی ہیں ، مساوات $\Delta_{ن-۲}$ = ۰ کی (ر - ۲) اصلیں ع کے مساوی ہیں اور علیٰ ہذا القیاس

یہ مقطع جسپر یہاں بحث کیگئی ہے نظری اور عملی ریاضیات کی متعدد تحقیقاتوں میں واقع ہوتا ہے ۔ زیر بحث اہم خاصیت کا جو ثبوت یہاں دیا گیا ہے وہ سامن (Salmon) کی Higher Algebra (دفعہ ۴۶) سے لیا گیا ہے

اور طالب علم کو اس مسئلہ کے دیگر ثبوتوں کے لئے اسکا حوالہ دیا جاتا ہے۔

۴۰ — اگر پچھلی مثال کے مقطع میں ر اصلیں عہ کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ہر پہلے صغیر میں (ر - ۱) اصلیں عہ کے مساوی ہیں ہر دوسرے صغیر میں (ر - ۲) اصلیں عہ کے مساوی ہیں، اور علیٰ ہذا۔

متکافی مقطع کے عناصر کے لئے ترقیم ا، ھ، گ، ..... استعمال کرنے سے ہمیں مساوات ملتی ہے

$$ا ب - ھ^۲ = \Delta_{ن-۲} \Delta_{ن}$$

اب صفوں اور ستونوں کے مناسب انتقال کے ذریعہ یہ آسانی کیساتھ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ ہر صدر ب پہلے صغیر میں ضعفی اصل عہ، ر - ۱ مرتبہ شامل ہوتی ہے۔ اوپر لکھی ہوئی مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ صغیر ھ میں یہ اصل ر - ۱ مرتبہ شامل ہونی چاہئے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی پہلے صغیر کو تعبیر کرنے کے لئے ھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۴۱ — وہ شرطیں معلوم کرو کہ مساوات

$$\begin{vmatrix} ا + لا & ھ & گ \\ ھ & ب + لا & ف \\ گ & ف & ج + لا \end{vmatrix} = ۰$$

میں مساوی اصلیں ہوں۔

چونکہ ہر پہلے صغیر میں دوہری اصل شامل ہونی چاہئے ہم فوراً مطلوبہ شرطیں شکل ذیل میں اخذ کرتے ہیں:-

$$ا - \frac{گ ھ}{ف} = ب - \frac{ھ ف}{گ} = ج - \frac{ف گ}{ھ}$$

[یہ اور اس سے پہلے کی مثال راؤتھ کی "Dynamics of a system of Rigid Bodies" حصہ دوم دفعہ ۶۱ سے لی گئی ہیں۔]

۴۲ — کسی متشاکل مقطع کو اس طور پر بدلا جا سکتا ہے کہ مزدوج

عنصروں کے کسی منتخبہ زوج میں سے ہر ایک عنصر صفر کے مساوی ہو اور مقطع متشاکل ہی رہے۔

مثلاً اُس مقطع پر غور کرو جو پچھلی مثال میں لا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے اور فرض کرو کہ عنصر گ کا علیحدہ کرنا یعنے اسکو صفر کے مساوی بنانا مطلوب ہے۔ تیسرے ستون کے ہر عنصر کو ا سے ضرب دو (اور اسکے (67) ساتھ ہی پورے مقطع کو ا سے تقسیم کرو) اور اس طور پر تبدیل شدہ عناصر میں سے پہلے ستون کے عناصر کو گ سے ضرب دینے کے بعد تفریق کرو۔ اب متناظر صفوں کے ساتھ بھی یہی عمل کرو تو حاصل مقطع متشاکل ہوگا اور اسمیں گ کی بجائے صفر ہوگا۔ یہ عمل کسی رتبہ کے مقطع پر جاری ہو سکتا ہے اور پہلی صف اور پہلے ستون کے مزدوج عناصر سب کے سب یکے بعد دیگرے علیحدہ کئے جا سکتے ہیں اور من بعد بقیہ صفوں اور ستونوں کے عناصر بھی۔ بالآخر مقطع ایک ایسے مقطع میں تحویل کیا جا سکتا ہے جسکے سب عناصر سوائے صدر عنصروں کے معدوم ہوں۔

۴۳ — ذیل کے کسی رتبہ کے مقطع کو ایسی شکل میں تحویل کرو کہ لا صرف صدر عناصر میں شامل ہو:-

ا$_1$ لا + اَ$_1$	ب$_1$ لا + بَ$_1$	ج$_1$ لا + جَ$_1$	. .
ا$_2$ لا + اَ$_2$	ب$_2$ لا + بَ$_2$	ج$_2$ لا + جَ$_2$	. .
ا$_3$ لا + اَ$_3$	ب$_3$ لا + بَ$_3$	ج$_3$ لا + جَ$_3$	. .
. . .	. . .	. . .	. . .

اسکو مقطع (ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ ... ل$_n$) کے متکافی مقطع سے ضرب دو۔

اگر دیا ہوا مقطع متشاکل ہے تو اس سے اس طور پر اخذ کیا ہوا مقطع متشاکل نہیں ہوگا لیکن ایسی صورت میں ایک دوسرا مختلف عمل اختیار کیا جا سکتا ہے تاکہ دیا ہوا مقطع ایک متشاکل مقطع میں تحویل ہو اور لا صرف صدر

عناصر میں موجود ہو چنانچہ پچھلی مثال کے طریق عمل کے بالکل مشابہ طریقہ سے یکے بعد دیگرے مزدوج عناصر کے تمام زوجوں میں سے لا کے سروں کو علیحدہ کیا جا سکتا ہے۔ اگر تحویل شدہ مقطع کے صدر عنصروں میں لا کے سروں کی علامتیں سب کی سب وہی ہوں تو مثال ۳۹ کی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ متناظر مساوات کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہونگی۔

۴۴۔ فرض کرو کہ ن ویں رتبہ کے ایک مقطع کو دو مستطیلی آرا استوں میں تقسیم کیا گیا ہے ایک میں صفوں کی تعداد مہ ہے اور دوسرے میں نہ (جہاں مہ + نہ = ن) اور فرض کرو کہ مقطعات کو ضرب دینے میں جو عمل اختیار کیا جاتا ہے اُسی عمل سے اِن دو آرا استوں سے حاصل ضربوں کے مہ نہ مجموعے بنائے گئے ہیں۔ تب اگر عناصر کے درمیان ایسے رشتے موجود ہوں کہ حاصل ضربوں کے یہ مجموعے علیحدہ علیحدہ معدوم ہوتے ہیں تو پہلے آرا استے سے بننے والے مہ رتبے کے مقطعات دوسرے آرا استے کے متمم عناصر سے بننے والے نہ رتبے کے مقطعات کے متناسب ہونگے۔

تفہیم کی خاطر ہم پانچویں رتبہ کا ایک مقطع لیتے ہیں لیکن ثبوت کا طرز بالکلیہ عام ہے۔ فرض کرو کہ مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 & \text{ا}_5 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 & \text{ب}_5 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 & \text{ج}_5 \\ \text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 & \text{لا}_4 & \text{لا}_5 \\ \text{ما}_1 & \text{ما}_2 & \text{ما}_3 & \text{ما}_4 & \text{ما}_5 \end{vmatrix}$$

کو دو آرا استوں میں اُفقاً توڑ دیا گیا ہے ایک میں تین صف ہیں اور (68)
دوسرے میں دو۔ فرض کرو کہ حسب ذیل چھ رشتے موجود ہیں:۔

$$\Sigma\, \text{ا}_1 \text{لا}_1 = 0 ،\ \Sigma\, \text{ا}_1 \text{ما}_1 = 0 ،\ \Sigma\, \text{ب}_1 \text{لا}_1 = 0 ،\ \Sigma\, \text{ب}_1 \text{ما}_1 = 0 ،\ \Sigma\, \text{ج}_1 \text{لا}_1 = 0 ،\ \Sigma\, \text{ج}_1 \text{ما}_1 = 0 .$$

اب اگر ∆ کو لاپلاس کے مسئلہ سے پھیلایا جائے اور صغیر مقطعات اس طور پر لئے جائیں کہ پھیلاؤ میں داخل ہونیوالی علامتیں سب کی سب مثبت ہوں (اور یہ آسانی کے ساتھ کیا جا سکتا ہے) یعنی اگر پھیلاؤ

∆ ≡ (ا۱ ب۲ ج۳)(لا۴ م۵) + (ا۱ ب۳ ج۴)(لا۲ م۵) + (ا۱ ب۲ ج۴)(لا۵ م۳) + ...

ہو تو یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ تیسرے رتبہ کا ہر صغیر مقطع جو پہلے آرا ستے سے بنتا ہے اُس مقطع کے متناسب ہے جو مندرجۂ بالا ∆ کے پھیلاؤ میں اسکے ساتھ جزوِ ضربی کے طور پر شریک ہے۔

سہولت کے مدنظر ∆ کے مندرجہ بالا پھیلاؤ کے لئے ہم ذیل کی ترقیم استعمال کرتے ہیں:-

∆ ≡ ل لَ + م مَ + ن نَ + پ پَ + ...

مقطع ∆ کا مربع لینے، اوپر کے رشتوں کو استعمال کرنے اور ہر ترکیبی آرا ستے کا جداگانہ طور پر مربع لینے سے جو مقطعات حاصل ہوں انکی بجائے انکی قیمتیں رکھنے، اور اس طور پر حاصل کردہ $∆^{۲}$ کی دو قیمتوں کو مساوی رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

(ل لَ + م مَ + ن نَ + ...)^{۲} = (ل^{۲} + م^{۲} + ن^{۲} + ...)(لَ^{۲} + مَ^{۲} + ..)

اور اس سے

(ل مَ - لَ م)^{۲} + (ل نَ - لَ ن)^{۲} + (م نَ - مَ ن)^{۲} + ... = ۰

اور اس سے ہم فوراً حاصل کر لیتے ہیں

ل/لَ = م/مَ = ن/نَ = پ/پَ = ...

۴۵ — چوتھے رتبہ کے ایک مقطع کو مساوی طور پر پچھلی مثال کی طرح دو مستطیلی آرا ستوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور وہی شرطیں پوری ہوتی ہیں اس مقطع سے بننے والے دوسرے رتبہ کے صغیروں کے درمیان

جو رشتے موجود ہیں انکو معلوم کرو۔

ہم چوتھے رتبہ کا عام مقطع

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix}$$

لیتے ہیں اور اسکو پہلے لاپلاس کے مسئلہ سے پھیلاتے ہیں۔ یہاں یہ جتانا ضروری ہے کہ ایسے مقطع کو دوسرے رتبہ کے صغیروں کی رقوم میں پھیلانے کی ضرورت اکثر واقع ہوگی اسلئے طالب علم کو اسکا پھیلاؤ مثبت علامتوں کے ساتھ اچھی طرح ذہن نشین کرلینا چاہیئے پھیلاؤ یہ ہے

$$(\text{ب}_1\,\text{ج}_2)(\text{ا}_3\,\text{د}_4) + (\text{ج}_1\,\text{ا}_2)(\text{ب}_3\,\text{د}_4) + (\text{ا}_1\,\text{ب}_2)(\text{ج}_3\,\text{د}_4)$$

$$+ (\text{ا}_1\,\text{د}_2)(\text{ب}_3\,\text{ج}_4) + (\text{ب}_1\,\text{د}_2)(\text{ج}_3\,\text{ا}_4) + (\text{ج}_1\,\text{د}_2)(\text{ا}_3\,\text{ب}_4)$$

اسکو لکھنے کا طریقہ واضح ہے۔ جب چار حروف شامل ہوں تو اسی ترتیب کا لحاظ رکھا جائے جیسا کہ ہم نے پچھلے موقعوں پر کیا ہے۔

(69) مثال ماسبق کی رو سے ہمیں ذیل کے رشتے فوراً ملجاتے ہیں:-

$$\frac{(\text{ب}_1\,\text{ج}_2)}{(\text{ا}_3\,\text{د}_4)} = \frac{(\text{ج}_1\,\text{ا}_2)}{(\text{ب}_3\,\text{د}_4)} = \frac{(\text{ا}_1\,\text{ب}_2)}{(\text{ج}_3\,\text{د}_4)} = \frac{(\text{ا}_1\,\text{د}_2)}{(\text{ب}_3\,\text{ج}_4)} = \frac{(\text{ب}_1\,\text{د}_2)}{(\text{ج}_3\,\text{ا}_4)} = \frac{(\text{ج}_1\,\text{د}_2)}{(\text{ا}_3\,\text{ب}_4)}$$

بشرطیکہ حسب ذیل چار مساواتیں درست ہوں:-

$$\Sigma\,\text{ا}_1\,\text{ا}_3 = 0،\quad \Sigma\,\text{ا}_1\,\text{ا}_4 = 0،\quad \Sigma\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3 = 0،\quad \Sigma\,\text{ا}_2\,\text{ا}_4 = 0،$$

ہم نے جو کچھ اوپر ثابت کیا ہے اُسکا ایک اہم استعمال ہندسہ مجسمات میں خط مستقیم کے چھ محددوں کی بحث میں ملیگا۔ (دیکھو سیامن کا سہ ابعادی ہندسہ تحلیلی طبع چہارم دفعہ ۵۷ ب)۔

یہاں یہ بتا دینا بھی ضروری معلوم ہوتا ہے کہ تیسرے رتبہ کے مقطع کے پھیلاؤ کو یکساں طور پر مثبت علامتوں کے ساتھ لکھ لینا سہولت کا باعث ہوتا ہے کیونکہ وہ کثرت سے عملی سوالات میں واقع ہوتا ہے۔ مثلاً مثال ماسبق کے مقطع ۵ میں آخری صف اور آخری ستون کو خارج کر دینے سے تیسرے رتبہ کا ایک مقطع حاصل ہوتا ہے۔ ہم اسکے پھیلاؤ کو ذیل میں لکھتے ہیں جسمیں شامل ہونیوالے تین حرفوں کو دائری ترتیب میں لیا گیا ہے:۔

$$(\text{ا}_1 \text{ب}_2 \text{ج}_3) \equiv \text{ا}_1(\text{ب}_2 \text{ج}_3) + \text{ب}_1(\text{ج}_2 \text{ا}_3) + \text{ج}_1(\text{ا}_2 \text{ب}_3)$$

۴۶ ۔ (ن-۱) خطی متجانس مساواتوں سے ن متغیروں کی نسبتیں حاصل کرنیکے لئے دفعہ ۱۴۵ میں جو مساواتیں (۳) حاصل ہوئی تھیں انکو مثال ۴۴ کے مسئلہ کی مدد سے اخذ کرو۔

۴۷ ۔ دی ہوئی خطی مساواتوں کے ایک جٹ سے اقل مربعوں کے طریقہ کی رو سے مجہول مقداروں کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ان کو مقطعات کی شکل میں بیان کرو۔

دی ہوئی مساواتوں کے متعلق جو تعداد میں مجہول مقداروں کی تعداد سے زیادہ ہیں یہ مان لیا جاتا ہے کہ وہ مشاہدے یا تجربہ کے نتیجہ کے طور پر حاصل ہوئی ہیں اور عددی سر جو انہیں داخل ہوتے ہیں مشاہدے کی خطاؤں کی وجہ سے پوری صحت کے ساتھ معلوم نہیں ہوتے۔ ایسی صورتوں میں مجہول مقداروں کی سب سے زیادہ قابل اعتماد قیمتیں اس طریقہ سے حاصل ہوتی ہیں جسکو اب ہم بیان کرینگے۔ اس طریقہ کو ہم "اقل مربعوں کا طریقہ" کہینگے۔ مثلاً تین مجہول مقداروں لا، ما، ی کے درمیان شکل $\text{ا}_1 \text{لا} + \text{ب}_1 \text{ما} + \text{ج}_1 \text{ی} = \text{م}_1$، $\text{ا}_2 \text{لا} + \text{ب}_2 \text{ما} + \text{ج}_2 \text{ی} = \text{م}_2$ وغیرہ کی پانچ مساواتیں لو۔ انکو علی الترتیب ا_1، ا_2، ا_3، ا_4، ا_5 سے ضرب دو اور جمع کرو۔ پھر ب_1، ب_2، ب_3، ب_4، ب_5 سے ضرب دو اور جمع کرو۔ اور پھر

ج_1، ج_2، ج_3، ج_4، ج_5 سے ضرب دو اور جمع کرو ۔ اس طرح حسب ذیل تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :—

$$\text{لا}\,\Sigma\,\text{ا}_1^2 + \text{ما}\,\Sigma\,\text{ا}_1\text{ب}_1 + \text{ی}\,\Sigma\,\text{ا}_1\text{ج}_1 = \Sigma\,\text{ا}_1\text{م}_1$$

$$\text{لا}\,\Sigma\,\text{ا}_1\text{ب}_1 + \text{ما}\,\Sigma\,\text{ب}_1^2 + \text{ی}\,\Sigma\,\text{ب}_1\text{ج}_1 = \Sigma\,\text{ب}_1\text{م}_1$$

$$\text{لا}\,\Sigma\,\text{ا}_1\text{ج}_1 + \text{ما}\,\Sigma\,\text{ب}_1\text{ج}_1 + \text{ی}\,\Sigma\,\text{ج}_1^2 = \Sigma\,\text{ج}_1\text{م}_1$$

اور ان سے بغیر کسی دقت کے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{(\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3)(\text{م}_1\text{ب}_2\text{ج}_3) + (\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_4)(\text{م}_1\text{ب}_2\text{ج}_4) + \cdots + (\text{ا}_3\text{ب}_4\text{ج}_5)(\text{م}_3\text{ب}_4\text{ج}_5)}{(\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3)^2 + (\text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_4)^2 + \cdots + (\text{ا}_3\text{ب}_4\text{ج}_5)^2}$$

اور اسی طرح ما اور ی کیلئے متناظر قیمتیں ملجاتی ہیں ۔ ان میں سے ہر قیمت میں شمار کنندہ میں دس اور نسب نما میں دس رقمیں شامل ہوتی ہیں ۔

۴۸ ۔ بتاؤ کہ لا کی وہ قیمت جو پچھلی مثال میں دی گئی ہے اس طور پر حاصل ہو سکتی ہے کہ پہلی پانچ مساواتوں میں سے ہر تین کے جٹ سے ما اور ی کو ساقط کیا جائے اور پھر عمل اسقاط سے صرف لا میں جو دس مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اِنپر اقل مربعوں کا طریقہ استعمال کیا جائے ۔

(70)

چودھواں باب

اسقاط

۱۵۰ – تعریفات – اگر ن مساواتوں کا ایک نظام، ن متغیروں کے درمیان متجانس یا (ن – ۱) متغیروں کے درمیان غیر متجانس، دیا جائے اور اگر ہم ان مساواتوں کو اس طور پر ترکیب دیں کہ تمام متغیر ساقط ہو جائیں اور ایک مساوات ر = ۰ ایسی حاصل ہو کہ اس میں صرف دی ہوئی مساواتوں کے سر شامل ہوں تو ہم ر کو جب اسے منطق صحیح شکل میں بیان کیا جائے حاصل اسقاط کہینگے۔

آئندہ کی بحث میں ہم خاص طور پر اُن دو مساواتوں پر زور دینگے جنمیں صرف ایک مجہول مقدار لا شامل ہوتی ہے۔ اس صورت میں مساوات ر = ۰ اس بات کی تصدیق کرتی ہے کہ یہ دو مساواتیں ہم آہنگ ہیں یعنی یہ دونوں مساواتیں لا کی ایک مشترک قیمت سے پوری ہوتی ہیں۔ اب ہم یہ بتائینگے کہ عمل اسقاط کس طرح کیا جا سکتا ہے تاکہ مقدار ر حاصل ہو جائے اور اس کے ساتھ ہی مثالوں کے ذریعہ ہم مختلف طریقوں کی توضیح کرینگے۔ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اسقاط کے بعض اعمال سے ر کی جس قیمت پر ہم پہنچتے ہیں اس میں ایک ضرورت سے زیادہ جزو ضربی شامل ہوتا ہے۔

اسقاط کا وہ طریقہ جسمیں متشاکل تفاعلوں سے مدد لیجاتی ہے

سا کی ایک ایسی قیمت کی طرف رہبری کرتا ہے جسمیں اس قسم کا جزو ضربی شامل نہیں ہوتا اور اسلئے حاصل اسقاط کی ٹھیک تعریف کے لئے دفعہ آیندہ کی بحث کے آخری حصہ کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساواتوں

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = 0$$

$$\text{اَ}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{بَ}\,\text{لا} + \text{جَ} = 0$$

سے لا کو ساقط کرنا مطلوب ہے۔

اِن مساواتوں کو حل کرنے اور اس طور پر حاصل کردہ لا کی قیمتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل اسقاط غیر منطق شکل

$$-\frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{\sqrt{\text{ب}^2 - \text{ا}\,\text{ج}}}{\text{ا}} = -\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}} + \frac{\sqrt{\text{بَ}^2 - \text{اَ}\,\text{جَ}}}{\text{اَ}}$$

میں معلوم ہوتا ہے۔ اسکو ا اَ سے ضرب دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں (۷۱)

$$\text{ا}\,\text{بَ} - \text{اَ}\,\text{ب} = \text{ا}\sqrt{\text{بَ}^2 - \text{اَ}\,\text{جَ}} - \text{اَ}\sqrt{\text{ب}^2 - \text{ا}\,\text{ج}}$$

طرفین کا مربع لینے اور غیر ضروری جزو ضربی ا اَ سے تقسیم کرنے اور پھر مربع لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\text{ر} = 4(\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2)(\text{اَ}\,\text{جَ} - \text{بَ}^2) - (\text{ا}\,\text{جَ} + \text{اَ}\,\text{ج} - 2\,\text{ب}\,\text{بَ})^2$$

حاصل اسقاط کو اخذ کرنے کا یہ طریقہ عملاً بہت محدود ہے کیونکہ عام طور پر یہ ممکن نہیں کہ چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجہ والی مساوات کی اصل کو ایک جبریہ ضابطہ سے بیان کیا جائے۔ اسلئے مساواتوں کو پہلے حل کرنیکے بغیر حاصل اسقاط کو متعین کرنیکے لئے دوسرے طریقے تجویز کئے گئے ہیں۔ اب ہم اسقاط کا وہ طریقہ بیان کرتے ہیں جسمیں مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں سے مدد لیجاتی ہے۔

اِن مساواتوں کی متناظر طرفوں کو باہم ضرب دیں اور ایک ہی ستون میں واقع ہونیوالے اجزائے ضربی کو ایکساتھ رکھیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ

$$\text{ا}_{0}^{\text{ن}}\,\text{په}(\text{عہ}_1)\,\text{په}(\text{عہ}_2)\ldots\text{په}(\text{عہ}_{\text{م}}) = (-1)^{\text{من}}\,\text{ب}_{0}^{\text{م}}\,\text{فه}(\text{بہ}_1)\,\text{فه}(\text{بہ}_2)\ldots\text{فه}(\text{بہ}_{\text{ن}})$$

اس لئے ہم لے سکتے ہیں

$$\text{ر} = (-1)^{\text{من}}\,\text{ب}_{0}^{\text{م}}\,\text{فه}(\text{بہ}_1)\,\text{فه}(\text{بہ}_2)\ldots\text{فه}(\text{بہ}_{\text{ن}}) = \text{ا}_{0}^{\text{ن}}\,\text{په}(\text{عہ}_1)\,\text{په}(\text{عہ}_2)\ldots\text{په}(\text{عہ}_{\text{م}})$$

کیونکہ ر کی یہ دونوں قیمتیں فه (لا) اور په (لا) کے سروں کے صحیح تفاعل ہیں جو صرف اسوقت صفر ہوتے ہیں جبکہ فه (لا) اور په (لا) میں ایک مشترک جزو ضربی ہو اور وہ متماثل ہوتے ہیں جب اِن کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جاتا ہے۔

۱۵۲ — حاصل اسقاط کی خاصیتیں۔ (۱) دو مساواتوں کے سروں میں اِن مساواتوں کے حاصل اسقاط ر کا رتبہ مساواتوں کے درجوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور اِس میں پہلی مساوات کے سر دوسری مساوات کے درجہ میں اور دوسری مساوات کے سر پہلی مساوات کے درجہ میں داخل ہوتے ہیں۔

یہ ہم دفعہ ۱۵۱ (۱) میں ر کی دونوں شکلوں کی نظر ثانی کرنے سے دیکھ سکتے ہیں کیونکہ اسکی پہلی شکل میں ا_0، ا_1، ....، $\text{ا}_{\text{م}}$ ن ویں درجہ میں داخل ہوتے ہیں اور اسکی دوسری شکل میں ب_0، ب_1، ب_2....$\text{ب}_{\text{ن}}$ م ویں درجہ میں داخل ہوتے ہیں۔ نیز یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ دو ارقام جبکہ ہر جملہ میں سے ایک کا انتخاب کیا جائے $(-1)^{\text{من}}\,\text{ب}_0^{\text{م}}\,\text{ا}_{\text{م}}^{\text{ن}}$ اور $\text{ا}_0^{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}^{\text{م}}$ ہیں

۱۵۱ - متشاکل تفاعلوں کی مدد سے اسقاط - فرض کرو کہ م ویں اور ن ویں درجوں کی دو جبریہ مساواتیں ہیں

$$\text{فہ}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_{.}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{م}-۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{\text{م}-۲} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{م}} = ۰$$

$$\text{پہ}(\text{لا}) \equiv \text{ب}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}} = ۰$$

اور فرض کرو کہ وہ شرط معلوم کرنا مطلوب ہے کہ ان مساواتوں کی ایک مشترک اصل ہو۔ اس مقصد کے لئے فرض کرو کہ مساوات فہ (لا) = ۰ کی اصلیں $\text{عہ}_{۱}$، $\text{عہ}_{۲}$، .....، $\text{عہ}_{\text{م}}$ ہیں۔ اگر دی ہوئی مساواتوں میں ایک مشترک اصل ہو تو یہ ضروری اور کافی ہے کہ مقداروں

$$\text{پہ}(\text{عہ}_{۱}),\ \text{پہ}(\text{عہ}_{۲}),\ \ldots\ldots,\ \text{پہ}(\text{عہ}_{\text{م}})$$

میں سے ایک صفر ہونی چاہئے یا دوسرے الفاظ میں حاصل ضرب

$$\text{پہ}(\text{عہ}_{۱})\,\text{پہ}(\text{عہ}_{۲})\,\text{پہ}(\text{عہ}_{۳})\ldots\ldots\text{پہ}(\text{عہ}_{\text{م}})$$

معدوم ہونا چاہئے۔ اس حاصل ضرب کو سروں کے ایک منطق اور صحیح تفاعل میں تحویل کرو جو ہمیشہ ممکن ہے کیونکہ وہ، مساوات فہ (لا) = ۰ کی اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے۔ اس طرح مطلوبہ حاصل اسقاط مل جائیگا۔ نیز اگر مساوات پہ (لا) = ۰ کی اصلیں $\text{بہ}_{۱}$، $\text{بہ}_{۲}$، $\text{بہ}_{۳}$، .... $\text{بہ}_{\text{ن}}$ ہوں تو

$$\text{پہ}(\text{عہ}_{۱}) = \text{ب}_{.}(\text{عہ}_{۱}-\text{بہ}_{۱})(\text{عہ}_{۱}-\text{بہ}_{۲})\ldots\ldots(\text{عہ}_{۱}-\text{بہ}_{\text{ن}})$$

$$\text{پہ}(\text{عہ}_{۲}) = \text{ب}_{.}(\text{عہ}_{۲}-\text{بہ}_{۱})(\text{عہ}_{۲}-\text{بہ}_{۲})\ldots\ldots(\text{عہ}_{۲}-\text{بہ}_{\text{ن}})$$

....

$$\text{پہ}(\text{عہ}_{\text{م}}) = \text{ب}_{.}(\text{عہ}_{\text{م}}-\text{بہ}_{۱})(\text{عہ}_{\text{م}}-\text{بہ}_{۲})\ldots\ldots(\text{عہ}_{\text{م}}-\text{بہ}_{\text{ن}})$$

اگر ہم بائیں طرف کے م ن اجزائے ضربی کی علامتیں بدل دیں اور (72)

(۲) اگر دونوں مساواتوں کی اصلوں کو ایک ہی مقدار غہ سے ضرب دیا جائے تو حاصل اسقاط غہ$^{\text{م ن}}$ سے ضرب کھا جاتا ہے۔

یہ نتیجہ ظاہر ہے کیونکہ عی - بیق شکل کے م ن اجزائے ضربی میں سے کوئی ایک غہ (عی - بیق) ہے اور اسلئے غہ$^{\text{م ن}}$ حاصل اسقاط کو تقسیم کرتا ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ حاصل اسقاط کا وزن م ن ہے اور اسی شکل میں اس مسئلہ کو اکثر بیان کیا جاتا ہے۔

(۳) اگر دونوں مساواتوں کی اصلوں میں ایک ہی مقدار کا اضافہ کیا جائے تو اس طور پر تحویل شدہ مساواتوں کا حاصل اسقاط اصلی مساواتوں کے حاصل اسقاط کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ

$$\text{ر} = \pm \text{ا}^{\text{ن}} \text{ب}^{\text{م}} \prod (\text{عی} - \text{بیق})$$

جہاں $\prod$ سے مراد عی - بیق شکل کے م ن ارقام کا مسلسل حاصل ضرب ہے اور یہ حاصل ضرب نہیں بدلتا اگر عی اور بیق میں ایک ہی مقدار کا اضافہ کیا جائے۔

(۴) اگر اصلوں کو انکے متکافیوں میں بدل دیا جائے تو تحویل شدہ (73)
مساواتوں سے ر کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے وہ غیر متغیر رہتی ہے لیکن اگر م ن ایک طاق عدد ہو تو صرف علامت بدل جاتی ہے۔

$$\text{ر} = \text{ا}^{\text{ن}} \text{ب}^{\text{م}} \prod (\text{عی} - \text{بیق})$$

ہیں اس استحالہ کا عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{رَا} = \text{اُ}^{\text{ن}}\,\text{بُ}^{\text{م}}\,(-1)^{\text{م ن}}\,\frac{\Pi\,(\text{عمی} - \text{بہق})}{(\text{عم}_1\,\text{عم}_2 \ldots \text{عمم})^{\text{ن}}\,(\text{بہ}_1\,\text{بہ}_2 \ldots\ldots \text{بہن})^{\text{م}}}$$

لیکن $\text{عم}_1\,\text{عم}_2 \ldots\ldots \text{عمم} = (-1)^{\text{م}}\,\frac{\text{اُم}}{\text{اُ}}$ ، $\text{بہ}_1\,\text{بہ}_2 \ldots\ldots \text{بہن} = (-1)^{\text{ن}}\,\frac{\text{بن}}{\text{ب}}$

اسلئے

$$\text{رَا} = \text{اُ}^{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{م}}\,(-1)^{\text{م ن}}\,\Pi\,(\text{عمی} - \text{بہق}) = (-1)^{\text{م ن}}\,\text{را}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو مساواتوں کے حاصل اسقاط میں ایسے تمام سروں کو جنکے لاحقے ایک دوسرے کے متمم ہیں مثلاً (اُ، اُم)، (اُ۱، اُم−۱)، وغیرہ کو حاصل اسقاط کی قیمت بدلے بغیر ایک دوسرے کی جگہ تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

(۵) اگر دونوں مساواتوں کو ہم رسم استحالہ سے مستحیل کیا جائے یعنی اگر لا کی بجائے

$$\frac{\text{لہ لا} + \text{مہ}}{\text{لہَ لا} + \text{مہَ}}$$

درج کیا جائے اور ہر مفرد جزو ضربی کو لہَ لا + مہَ سے ضرب دیا جائے تاکہ نئی مساواتیں صحیح (Integral) ہو جائیں تو نیا حاصل اسقاط $\text{رَا} = (\text{لہ مہَ} - \text{لہَ مہ})^{\text{م ن}}\,\text{را}$ ۔

اسکو ثابت کرنیکے لئے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{فہ}(\text{لا}) = \text{اُ}\,(\text{لا} - \text{عم}_1)\,(\text{لا} - \text{عم}_2) \ldots\ldots (\text{لا} - \text{عمم})$$

$$\text{پہ}(\text{لا}) = \text{ب}\,(\text{لا} - \text{بہ}_1)\,(\text{لا} - \text{بہ}_2) \ldots\ldots (\text{لا} - \text{بہن})$$

نیز لا − عر ہو جاتا ہے (لہ − لہَ عر) (لا − (مہَ عر − مہ) / (لہ − لہَ عر))

لا − بر ہو جاتا ہے (لہ − لہَ بر) (لا − (مہَ بر − مہ) / (لہ − لہَ بر))

اب ہر مساوات کے تمام اجزائے ضربی کو باہم ضرب دینے سے
ا. ہو جاتا ہے ا. (لہ − لہَ ع۱) (لہ − لہَ ع۲) ..... (لہ − لہَ عم)

ب. ہو جاتا ہے ب. (لہ − لہَ ب۱) (لہ − لہَ ب۲) ..... (لہ − لہَ بن)

نیز چونکہ عر اور بر، (مہَ عر − مہ) / (لہ − لہَ عر) اور (مہَ بر − مہ) / (لہ − لہَ بر) میں تحویل ہو جاتے ہیں (74)

اسلئے عر − بر ہو جاتا ہے ((لہ مہَ − لہَ مہ) (عر − بر)) / ((لہ − لہَ عر) (لہ − لہَ بر))

اسلئے ا.ن ب.م ∏ (عر − بر) ہو جاتا ہے ا.ن ب.م (لہ مہَ − لہَ مہ)من ∏ (عر − بر)

یعنی فہ (لا) اور پہ (لا) کی نئی شکلوں سے جو حاصل اسقاط محسوب ہوا ہے وہ

(لہ مہَ − لہَ مہ)من ر

ہے۔

اس مسئلہ میں پچھلے تین مسئلے شامل ہیں اور وہ مجموعی طور پر اس مسئلہ کے معادل ہیں۔

۱۵۳ — یولر کا اسقاط کا طریقہ — اگر م ویں اور ن ویں درجوں کی دو مساواتوں فہ (لا) = ۰ اور پہ (لا) = ۰ میں کوئی مشترک اصل طہ ہو تو ہم مان سکتے ہیں

فہ (لا) ≡ (لا − طہ) فہ$_{1}$ (لا)

پہ (لا) ≡ (لا − طہ) پہ$_{1}$ (لا)

جہاں　فہ$_{1}$ (لا) ≡ ف$_{1}$ لا$^{م-1}$ + ف$_{2}$ لا$^{م-2}$ + ... + فم

پہ$_{1}$ (لا) ≡ ق$_{1}$ لا$^{ن-1}$ + ق$_{2}$ لا$^{ن-2}$ + ... + قن

اور سر طہ پر منحصر ہونیکی وجہ سے غیر معین ہیں۔

اوپر کی دو متماثلہ مساواتوں سے

فہ (لا) پہ$_{1}$ (لا) ≡ فہ$_{1}$ (لا) پہ (لا)

جو (م + ن − ۱) ویں درجہ کی ایک متماثلہ مساوات ہے۔ اب اس مساوات کی طرفین میں لا کی مختلف قوتوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے (م + ن) مقداروں ف$_{1}$، ف$_{2}$، .... فم، ق$_{1}$، ق$_{2}$، .... قن میں پہلے درجہ کی (م + ن) متجانس مساواتیں ملتی ہیں اور ان مقداروں کو دفعہ ۱۴۵ کے طریقہ سے ساقط کیا جائے تو دی ہوئی دو مساواتوں کا حاصل اسقاط ایک مقطع کی شکل میں حاصل ہوتا ہے۔

(75)

مثال

فرض کرو کہ دو مساواتوں

ا لا^{2} + ب لا + ج = ۰، ا$_{1}$ لا^{2} + ب$_{1}$ لا + ج$_{1}$ = ۰

میں ایک اصل مشترک ہے۔ تب متماثلاً

(ق$_{1}$ لا + ق$_{2}$) (ا لا^{2} + ب لا + ج) ≡ (ف$_{1}$ لا + ف$_{2}$) (ا$_{1}$ لا^{2} + ب$_{1}$ لا + ج$_{1}$)

یا (ق$_{1}$ ا − ف$_{1}$ ا$_{1}$) لا^{3} + (ق$_{1}$ ب + ق$_{2}$ ا − ف$_{1}$ ب$_{1}$ − ف$_{2}$ ا$_{1}$) لا^{2}

+ (ق$_{1}$ ج + ق$_{2}$ ب − ف$_{1}$ ج$_{1}$ − ف$_{2}$ ب$_{1}$) لا + ق$_{2}$ ج − ف$_{2}$ ج$_{1}$ ≡ ۰

اس مساوات کے تمام سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے حسب ذیل چار متجانس مساواتیں ملتی ہیں

$$\text{ق}_1\text{ا} - \text{ف}_1\text{ا}_1 = 0$$
$$\text{ق}_1\text{ب} + \text{ق}_2\text{ا} - \text{ف}_1\text{ب}_1 - \text{ف}_2\text{ا}_1 = 0$$
$$\text{ق}_1\text{ج} + \text{ق}_2\text{ب} - \text{ف}_1\text{ج}_1 - \text{ف}_2\text{ب}_1 = 0$$
$$\text{ق}_2\text{ج} - \text{ف}_2\text{ج}_1 = 0$$

اور ف، ف، ق، ق کو ساقط کرنے سے مشترک اصل کے لئے یہیں شرط ملتی ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & 0 & \text{ا}_1 & 0 \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{ج}_1 & \text{ب}_1 \\ 0 & \text{ج} & 0 & \text{ج}_1 \end{vmatrix} = 0$$

طالب علم آسانی کے ساتھ اس بات کی تصدیق کر سکتا ہے کہ یہ نتیجہ دفعہ ۱۵۰ کے نتیجہ کے مطابق ہے۔

۱۵۴ ـ سلوسٹر (sylvester) کا اسقاط کا طریقہ۔ اس طریقہ سے حواصل اسقاط کے لئے وہی مقطعات حاصل ہوتے ہیں جو یولر کے طریقہ سے ملتے ہیں۔ لیکن عمومیت کے نقطہ نظر سے اس طریقہ کو یولر کے طریقہ پر ترجیح حاصل ہے کیونکہ اسکو اکثر ایسی مساواتوں کے حاصل اسقاط دریافت کرنے میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جنمیں متعدد متغیر شامل ہوں۔

فرض کرو کہ دو مساواتوں

$$\text{فہ}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_0\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_2\text{لا}^{\text{م}-2} + \dots + \text{ا}_{\text{م}} = 0$$
$$\text{پہ}(\text{لا}) \equiv \text{ب}_0\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

کا حاصل اسقاط دریافت کرنا مطلوب ہے۔ پہلی مساوات کو ہم لا کی متواتر قوتوں

$$لا^{ن-۱}،\ لا^{ن-۲}،\ لا^{ن-۳}،\ \ldots\ldots،\ لا،\ لا^{۰}$$

سے اور دوسری کو

$$لا^{م-۱}،\ لا^{م-۲}،\ لا^{م-۳}،\ \ldots\ldots،\ لا،\ لا^{۰}$$

سے ضرب دیتے ہیں۔ اس طرح (م + ن) مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنمیں لا کی بڑی سے بڑی قوت ن + م - ۱ ہے۔ اب اتنی مساواتیں ملجاتی ہیں کہ اُنسے $لا^{م+ن-۱}$، $لا^{م+ن-۲}$، ..... لا، لا کو الگ الگ متغیر سمجھ کر ان کو ساقط کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

۱۔ درجۂ دوم کی دو مساواتوں

$$ا\,لا^{۲} + ب\,لا + ج = ۰،\quad ا_{۱}\,لا^{۲} + ب_{۱}\,لا + ج_{۱} = ۰$$

کا حاصل اسقاط ر معلوم کرو۔

$$ا\,لا^{۳} + ب\,لا^{۲} + ج\,لا = ۰$$
$$ا\,لا^{۲} + ب\,لا + ج = ۰$$
$$ا_{۱}\,لا^{۳} + ب_{۱}\,لا^{۲} + ج_{۱}\,لا = ۰$$
$$ا_{۱}\,لا^{۲} + ب_{۱}\,لا + ج_{۱} = ۰$$

ان سے $لا^{۳}$، $لا^{۲}$، لا کو ساقط کرنے سے وہی مقطع حاصل ہوتا ہے جو پچھلے دفعہ میں حاصل ہوا تھا صرف اِسقدر فرق ہے کہ اب صفوں کی بجائے ستون ہیں:۔

$$ر \equiv \begin{vmatrix} ا & ب & ج & ۰ \\ ۰ & ا & ب & ج \\ ا_{۱} & ب_{۱} & ج_{۱} & ۰ \\ ۰ & ا_{۱} & ب_{۱} & ج_{۱} \end{vmatrix}$$

۲ ۔ دو مساواتوں

$$\text{ع} \equiv \text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \text{ا}_3\,\text{لا}^3 + \text{ا}_4\,\text{لا}^4 = 0$$

$$\text{و} \equiv \text{ب}_0 + \text{ب}_1\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{لا}^2 + \text{ب}_3\,\text{لا}^3 = 0$$

کا حاصل اسقاط لکھو ۔

پہلے کی طرح عمل کرنے سے ہمیں آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے

$$\text{ر} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_0 & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ا}_0 & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ا}_0 & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ب}_0 & \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ب}_0 & \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ب}_0 & \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{ب}_0 & \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ ر میں ع کے سر تیسرے درجہ میں اور و کے سر چوتھے درجہ میں شامل ہوتے ہیں ۔ نیز $\text{ا}_0^3\,\text{ب}_3^4$ بھی ر کی ایک رقم ہے (دیکھو (۱) دفعہ ۱۵۲) ۔

۱۵۵ ۔ بیزو (Bazout) کا اسقاط کا طریقہ ۔ عام طریق عمل

بہت آسانی کے ساتھ سمجھ میں آ جائیگا اگر اسکو اول چند خاص خاص صورتوں پر استعمال کیا جائے ۔ چنانچہ ہم اسکو (۱) ایک ہی درجہ کی مساواتوں کے لئے اور (۲) مختلف درجوں کی مساواتوں کے لئے استعمال کرینگے ۔

(۱) فرض کرو کہ دو کعبی مساواتوں

$$\text{ا}\,\text{لا}^3 + \text{ب}\,\text{لا}^2 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{د} = 0$$

$$\text{ا}_1\,\text{لا}^3 + \text{ب}_1\,\text{لا}^2 + \text{ج}_1\,\text{لا} + \text{د}_1 = 0$$

(۶۶) کا حاصل اسقاط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

اِن دو مساواتوں کو متواتر

$$ا_۱ \quad \text{اور} \quad ا$$

$$ا_۱ لا + ب_۱ \quad \text{اور} \quad ا لا + ب$$

$$ا_۱ لا^۲ + ب_۱ لا + ج_۱ \quad \text{اور} \quad ا لا^۲ + ب لا + ج$$

سے ضرب دینے اور ہر دفعہ اس طور پر حاصل شدہ حاصل ضربوں کو تفریق کرنے سے ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں:-

$$(ا ب_۱) لا^۲ + (ا ج_۱) لا + (ا د_۱) = ۰$$

$$(ا ج_۱) لا^۲ + \{(ا د_۱) + (ب ج_۱)\} لا + (ب د_۱) = ۰$$

$$(ا د_۱) لا^۲ + (ب د_۱) لا + (ج د_۱) = ۰$$

اِن مساواتوں سے لا^۲، لا کو جداگانہ متغیروں کے طور پر ساقط کرنے سے حاصل اسقاط ایک متشاکل مقطع کی شکل میں حاصل ہوتا ہے جو ذیل میں درج ہے:-

$$\begin{vmatrix} (ا ب_۱) & (ا ج_۱) & (ا د_۱) \\ (ا ج_۱) & (ا د_۱) + (ب ج_۱) & (ب د_۱) \\ (ا د_۱) & (ب د_۱) & (ج د_۱) \end{vmatrix}$$

حاصل اسقاط کو اخذ کرنے کے طریقہ کو زیادہ واضح کرنیکے لئے ہم حسب ذیل طریقۂ عمل درج کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ دو چار درجی مساواتیں ہیں

$$ا لا^۴ + ب لا^۳ + ج لا^۲ + د لا + ع = ۰ ،$$

$$ا_۱ لا^۴ + ب_۱ لا^۳ + ج_۱ لا^۲ + د_۱ لا + ع_۱ = ۰ ،$$

اب بیزو کے طریقہ کو کوشی نے جس صورت میں پیش کیا ہے اسکے مطابق عمل کرنے سے ہمیں مساواتوں کا حسب ذیل نظام ملتا ہے

$$\frac{ا}{ا_1} = \frac{ب لا^3 + ج لا^2 + د لا + ع}{ب_1 لا^3 + ج_1 لا^2 + د_1 لا + ع_1} ،$$

$$\frac{ا لا + ب}{ا_1 لا + ب_1} = \frac{ج لا^2 + د لا + ع}{ج_1 لا^2 + د_1 لا + ع_1} ،$$

$$\frac{ا لا^2 + ب لا + ج}{ا_1 لا^2 + ب_1 لا + ج_1} = \frac{د لا + ع}{د_1 لا + ع_1} ،$$

$$\frac{ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د}{ا_1 لا^3 + ب_1 لا^2 + ج_1 لا + د_1} = \frac{ع}{ع_1} ،$$

(78) کسروں کو دور کرنے اور $لا^3$ ، $لا^2$ ، لا کو ساقط کرنے سے حاصل اسقاط کے لئے حسب ذیل مقطع ملتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} (ا ب_1) & (ا ج_1) & (ا د_1) & (ا ع_1) \\ (ا ج_1) & (ا د_1)+(ب ج_1) & (ا ع_1)+(ب د_1) & (ب ع_1) \\ (ا د_1) & (ا ع_1)+(ب د_1) & (ب ع_1)+(ج د_1) & (ج ع_1) \\ (ا ع_1) & (ب ع_1) & (ج ع_1) & (د ع_1) \end{vmatrix}$$

اب اگر ہم دو متشاکل مقطعوں

$$\begin{vmatrix} (ا ب_1) & (ا ج_1) & (ا د_1) & (ا ع_1) \\ (ا ج_1) & (ا د_1) & (ا ع_1) & (ب ع_1) \\ (ا د_1) & (ا ع_1) & (ب ع_1) & (ج ع_1) \\ (ا ع_1) & (ب ع_1) & (ج ع_1) & (د ع_1) \end{vmatrix} ، \quad \begin{vmatrix} (ب ج_1) & (ب د_1) \\ (ب د_1) & (ج د_1) \end{vmatrix}$$

پر غور کریں جنکی ساخت فوراً ظاہر ہو جاتی ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل اسقاط

کا، دوسرے مقطع کے عناصر کو پہلے مقطع کے چار درمیانی عناصر میں جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح پانچویں درجہ کی دو مساواتوں

$$ا لا^{5} + ب لا^{4} + ج لا^{3} + د لا^{2} + ع لا + ف = ۰ ،$$

$$ا_{1} لا^{5} + ب_{1} لا^{4} + ج_{1} لا^{3} + د_{1} لا^{2} + ع_{1} لا + ف_{1} = ۰ ،$$

کی صورت میں حاصل اسقاط ذیل کے تین مقطعوں سے حاصل ہوتا ہے

(ا ب$_1$) (ا ج$_1$) (ا د$_1$) (ا ع$_1$) (ا ف$_1$) ،
(ا ج$_1$) (ا د$_1$) (ا ع$_1$) (ا ف$_1$) (ب ف$_1$)
(ا د$_1$) (ا ع$_1$) (ا ف$_1$) (ب ف$_1$) (ج ف$_1$)
(ا ع$_1$) (ا ف$_1$) (ب ف$_1$) (ج ف$_1$) (د ف$_1$)
(ا ف$_1$) (ب ف$_1$) (ج ف$_1$) (د ف$_1$) (ع ف$_1$)

(ب ج$_1$) (ب د$_1$) (ب ع$_1$) ،
(ب د$_1$) (ب ع$_1$) (ج ع$_1$)
(ب ع$_1$) (ج ع$_1$) (د ع$_1$)

(ج د$_1$)

ان مقطعوں سے حاصل اسقاط کو اخذ کرنیکے لئے دوسرے مقطع کے عناصر کو پہلے مقطع کے بیچ کے نو عنصروں میں جمع کیا جائے اور پھر حاصل کردہ مقطع کے مرکزی عنصر میں تیسرا مقطع جمع کیا جائے۔ طالب علم کو عام صورت میں حاصل اسقاط کا مقطع بنانے میں انطباق کا ایسا ہی عمل کرنے میں کوئی مشکل پیش نہ آئیگی۔

(۲) اب ہم وہ صورت لیتے ہیں جسمیں دو مساواتیں مختلف (79)
ابعاد کی ہوں
مثلاً

ا لا^{4} + ب لا^{3} + ج لا^{2} + د لا + ع = ۰ ،

ا۱ لا^{2} + ب۱ لا + ج۱ = ۰ ،

ان مساواتوں کو ترتیب وار

ا۱ اور ا۱ لا^{2}

ا۱ لا + ب۱ اور (ا۱ لا + ب۱) لا^{2}

سے متواتر ضرب دینے اور ہر دفعہ اس طور پر بنے ہوئے حاصل ضربوں کو تفریق کرنے سے ہمیں ذیل کی دو مساواتیں ملتی ہیں :-

(ا ب۱) لا^{3} + (ا ج۱) لا^{2} − د ا۱ لا + ع ا۱ = ۰ ،

(ا ج۱) لا^{3} + {(ب ج۱) − د ا۱} لا^{2} − {د ب۱ + ع ا۱} لا − ع ب۱ = ۰ ،

اب اگر ہم اِنکے ساتھ دو مساواتوں

ا۱ لا^{3} + ب۱ لا^{2} + ج۱ لا = ۰

ا۱ لا^{2} + ب۱ لا + ج۱ = ۰

کو شامل کریں تو ہمارے پاس چار مساواتیں ہونگی جنکے ذریعہ سے لا^{3} ، لا^{2} ، لا ساقط ہو سکتے ہیں ۔ چنانچہ حاصل اسقاط ایک مقطع کی شکل میں ملتا ہے جو یہ ہے :-

(ا ب۱)	(ا ج۱)	د ا۱	ع ا۱
(ا ج۱)	(ب ج۱) − د ا۱	د ب۱ + ع ا۱	ع ب۱
ا۱	ب۱	− ج۱	۰
۰	ا۱	− ب۱	− ج۱

اس مقطع میں پہلی مساوات کے سر دوسرے درجہ میں اور دوسری

مساوات کے سر جو تھے درجہ میں شامل ہوتے ہیں اور یہی ہونا چاہئے پس کوئی غیر ضروری جزو ضربی اس حاصل استقاط میں داخل نہیں ہوتا

اب ہم عام صورت سے لیتے ہیں جسمیں دو مساواتیں م ویں اور ن ویں درجوں کی ہیں ۔

فرض کرو کہ مساواتیں ہیں

$$\text{فہ (لا)} \equiv \text{ا}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{م}} = 0 \text{ ،}$$

$$\text{پہ (لا)} \equiv \text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}} = 0 \text{ ،}$$

جہاں م > ن ۔ فرض کرو کہ دوسری مساوات کو $\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}$ سے ضرب (80)
دیا گیا ہے تو

$$\text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} = 0$$

اس مساوات کا درجہ وہی ہے جو پہلی مساوات کا ہے ۔ لیکن اس مساوات میں پہ (لا) = ۰ کی ن اصلوں کے علاوہ م ۔ ن اصلیں ہیں جو صفر کے مساوی ہیں ۔ اسلئے ہمیں اس بات سے خبردار رہنا چاہیئے کہ حاصل استقاط کی شکل میں جزو ضربی $\text{ا}_{\text{م}}^{\text{م}-\text{ن}}$ (یعنے ان اصلوں کو فہ (لا) = ۰ میں درج کرنیکا جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے) داخل نہ ہو ۔ ان دو مساواتوں سے اوپر کی صورت (۱) کے مطابق ہم حسب ذیل ن مساواتیں اخذ کرتے ہیں :-

$$\frac{\text{ا}_{\cdot}}{\text{ب}_{\cdot}} = \frac{\text{ا}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{م}}}{\text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}} \text{ ،}$$

$$\frac{ا_. لا + ا_۱}{ب_. لا + ب_۱} = \frac{ا_۲ لا^{م-۲} + ا_۳ لا^{م-۳} + \cdots + ا_م}{ب_۲ لا^{م-۲} + ب_۳ لا^{م-۳} + \cdots + ب_ن لا^{م-ن}}$$

. . . .

$$\frac{ا_. لا^{ن-۱} + ا_۱ لا^{ن-۲} + \cdots + ا_{ن-۱}}{ب_. لا^{ن-۱} + ب_۱ لا^{ن-۲} + \cdots + ب_{ن-۱}} = \frac{ا_ن لا^{م-ن} + ا_{ن+۱} لا^{م-ن-۱} + \cdots + ا_م}{ب_ن لا^{م-ن}}،$$

جو، کسروں کے دور کرنے پر، سب کی سب (م - ۱) ویں درجہ کی مساواتیں ہیں - اِن ن مساواتوں اور م - ن مساواتوں

$$ب_. لا^{م-۱} + ب_۱ لا^{م-۲} + ب_۲ لا^{م-۳} + \cdots = ۰$$

$$ب_. لا^{م-۲} + ب_۱ لا^{م-۳} + \cdots\cdots = ۰$$

. . . .

$$ب_. لا^{ن} + ب_۱ لا^{ن-۱} + \cdots + ب_ن = ۰$$

سے $لا^{م-۱}$، $لا^{م-۲}$، ...، لا کو جداگانہ مقداروں کے طور پر ساقط کیا جائے تو حاصل اسقاط م ویں رتبہ کے ایک مقطع کی شکل میں ملتا ہے جسمیں پہلی مساوات کے سر ن ویں درجہ میں اور دوسری مساوات کے سر م ویں درجہ میں داخل ہوتے ہیں - بس یہ ظاہر ہے کہ کوئی غیر ضروری جزو ضربی داخل نہیں ہو سکتا اور اس طریقہ سے جو حاصل اسقاط ملتا ہے اُس پر صفر اصلوں کے شامل کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑتا۔

اگر ایک ہی درجہ م کی دو مساواتوں فہ(لا) = ۰، پہ(لا) = ۰ کا (81)
حاصل اسقاط س۱ ہو تو نظام

لہ فہ (لا) + مہ پہ (لا) = ۰، لہَ فہ (لا) + مہَ پہ (لا) = ۰

کے حاصل اسقاط رَ کی قیمت

(لہ مہَ - لہَ مہ)^م ر

ہوگی کیونکہ صغیروں (ار، بس) میں سے ہر ایک (جو بیزو کے طریقہ میں ر کے مقطع کی ترکیب میں آتے ہیں) اس صورت میں

| لہ ار + مہ بار، لہَ ار + مہَ بر |
| لہ اس + مہ بس، لہَ اس + مہَ بس | = (لہ مہَ - لہَ مہ) (ار بس)

ہو جاتا ہے۔ پس رَ = (لہ مہَ - لہَ مہ)^م ر کیونکہ ر، م ویں رتبہ کا مقطع ہے۔

۱۵۶ - اسقاط کے دوسرے طریقے۔ ہم اسقاط کا ایک اور طریقہ بیان کرنیکے بعد اس مضمون کو ختم کرتے ہیں۔ یہ طریقہ اکثر استعمال ہوتا ہے لیکن اس میں یہ خرابی ہے کہ حاصل اسقاط میں عام طور پر غیر ضروری اجزائے ضربی شامل ہوتے ہیں جس عمل کی اب ہم تشریح کرینگے وہ خاصیتاً اس عمل کے معادل ہے جسکو عام طور پر مشترک مقسوم علیہ اعظم کا طریقہ کہتے ہیں۔

اس طریقہ میں درجہ دوم کی دو مساواتوں

ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰

ا، لا^۲ + ب، لا + ج، = ۰

کا حاصل اسقاط معلوم کرنے کے لئے ہم ان مساواتوں کو یکے بعد دیگرے ا، اور ا، ج، اور ج سے ضرب دیتے ہیں اور حاصل ضربوںکو

تفریق کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں دو مساواتیں ملتی ہیں

(ا ب$_1$) لا + (ا ج$_1$) = ۰

لا {(ا ج$_1$) لا + (ب ج$_1$)} = ۰

اب چونکہ لا کی صفر قیمت دی ہوئی دونوں مساواتوں کو پورا نہیں کرتی ہم اس دوسری مساوات سے جزو ضربی لا خارج کر سکتے ہیں اور پھر حاصل اسقاط کو شکل

(ا ج$_1$)^2 − (ا ب$_1$) (ب ج$_1$) = ۰

میں حاصل کرتے ہیں جسمیں کوئی غیر ضروری جزو ضربی نہیں ہے۔
چونکہ اس جملہ کا درجہ چار اور اسکا وزن چار ہے یہ حاصل اسقاط کی صحیح شکل ہے۔

اسی طرح کے عمل سے کعبی مساواتوں

ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د = ۰،

ا$_1$ لا^3 + ب$_1$ لا^2 + ج$_1$ لا + د$_1$ = ۰

کا حاصل اسقاط معلوم کرنیکے لئے ہم ان مساواتوں کو یکے بعد دیگرے
ا$_1$ اور ا، د$_1$ اور د سے ضرب دیں اور اس طور پر بنے ہوئے (82)
حاصل ضربوں کو ہر دفعہ تفریق کریں تو حاصل ہوتا ہے:-

(ا ب$_1$) لا^2 + (ا ج$_1$) لا + (ا د$_1$) = ۰،
(ا د$_1$) لا^2 + (ب د$_1$) لا + (ج د$_1$) = ۰ } .... (۱)

اب اِن دو درجہ دوم کے جملوں سے لا کو محصلہ بالا ضابطہ کے ذریعہ سے ساقط کیا جائے تو حاصل اسقاط ملتا ہے

| (ا ب$_1$)، (ا د$_1$) ؛ (ا د$_1$)، (ج د$_1$) |^2 − | (ا ب$_1$)، (ا ج$_1$) ؛ (ا د$_1$)، (ب د$_1$) | × | (ا ج$_1$)، (ا د$_1$) ؛ (ب د$_1$)، (ج د$_1$) |

جو ایسا جملہ ہے جسکا درجہ ۸ اور وزن ۱۲ ہے حالانکہ درجہ ۶ اور وزن ۹ ہونا چاہئے۔ پس یہ ظاہر ہے کہ یہ ایک جزو ضربی سے قابل تقسیم ہے جسکا درجہ ۲ اور وزن ۳ ہے۔ اسلئے اس جزو ضربی کی شکل ہونی چاہئے ل (ب ج۱) + م (ا د۱)۔ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ یہ جزو ضربی (ا د۱) ہے اور یہ معلوم کرینگے کہ اس سے تقسیم کرنیکے بعد خارج قسمت کیا ہے۔

اس مقصد کے لئے صرف اُن رقموں کو رکھنے سے جنمیں (ا د۱) بالراست شامل نہیں ہوتا ہمیں حاصل ہوتا ہے

(ا ب۱) (ج د۱) { (ا ب۱) (ج د۱) + (ج ا۱) (ب د۱) }

جو (ا د۱) سے تقسیم ہو جاتا ہے کیونکہ

(ب ج۱) (ا د۱) + (ج ا۱) (ب د۱) + (ا ب۱) (ج د۱) = ۰

مقطعات کو پھیلانے اور (ا د۱) سے تقسیم کر دینے سے آخر لام ہمیں خارج قسمت ملتا ہے

(ا د۱)۳ - ۲ (ا ب۱) (ج د۱) (ا د۱) + (ب د۱) (ج ا۱) (ا د۱)

+ (ج ا۱)۲ (ج د۱) + (ا ب۱) (ب د۱)۲ - (ا ب۱) (ب ج۱) (د ج۱)

جو واجب درجہ اور وزن کا ہونیکی وجہ سے مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

اگر ہم اسی طرح دو چار درجی مساواتوں کا حاصل اسقاط، عمل کو دو کعبی مساواتوں سے ساقط کرنےمیں تحویل کرکے، معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں چوتھے درجہ کا ایک غیر ضروری جزو ضربی خارج کرنا ہوگا جو اس بات کی شرط ہے کہ اِن کعبیوں میں ایک جزو ضربی مشترک ہونا چاہئے اگرچیکہ چار درجیوں میں جن سے یہ کعبی اخذ کئے گئے ہیں مشترک جزو ضربی کا ہونا ضروری نہیں ہے۔ بالعموم اگر ہم اس طریقہ سے

ن ویں درجہ کی دو مساواتوں کا حاصل اسقاط، (ن - ۱) درجہ کی دو مساواتوں سے ساقط کرنے سے، تلاش کریں تو ہمیں ۲ ن - ۴ ویں رتبہ کا ایک غیر ضروری جزو ضربی خارج کرنا پڑیگا - اس لئے یہ طریقہ پچھلے تمام طریقوں سے ادنیٰ ہے اور اسکو سہولت کے ساتھ استعمال نہیں کیا جا سکتا جب تک کہ غیر ضروری اجزائے ضربی آسانی کیساتھ جدا نہ ہو سکیں - (83)

۱۵۷ - ممیز - کسی مساوات کا ممیز جبکہ مساوات میں ایک واحد مجہول مقدار شامل ہو سروں کا وہ سادہ ترین منطق صحیح تفاعل ہے جسکا صفر ہونا اُس شرط کو بیان کرتا ہے جو مساوی اصلوں کے لئے ہے - اس قسم کے تفاعلوں کی مثالیں دفعات ۴۲ اور ۶۸ میں آچکی ہیں - اب ہم یہ بتائینگے کہ وہ حواصل اسقاط کی خاص صورتیں ہیں -

اگر مساوات ف (لا) = ۰ میں ایک دوہری اصل ہو تو یہ اصل مساوات فَ (لا) = ۰ میں ایک مرتبہ واقع ہوگی اور لا فَ (لا) کو ن ف (لا) میں سے تفریق کیا جائے تو اسی اصل کو ن ف (لا) - لا فَ (لا) = ۰ میں واقع ہونا چاہئے - یہ مساوات لا میں (ن - ۱) ویں درجہ کی ہے - اس مساوات اور مساوات فَ (لا) = ۰ سے جسکا درجہ بھی ن - ۱ ہے لا کو ساقط کیا جائے تو ہمیں سروں کا ایک تفاعل ملتا ہے جسکا صفر ہونا مساوی اصلوں کے لئے ضروری شرط ہے - اس حاصل اسقاط کا درجہ ف (لا) کے سروں میں ۲ (ن - ۱) ہے اور اسکا وزن ن (ن - ۱) ہے جیسا کہ دفعہ ۱۵۲، (۱) میں دی ہوئی نمونہ کی رقموں کو دیکھنے سے واضح ہے - اگر ممیز کو دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے ایک تشاکل تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے تو وہ اصلوں کے فرقوں کے (کم سے کم قوت میں اٹھائے ہوئے) اس حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جبکہ سروں کی رقوم میں منطق شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے - فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب $\Pi(\alpha_1 - \alpha_2)^2$

اس طور پر بیان ہو سکتا ہے اور چونکہ یہ کسی اصل میں ۲ (ن - ۱) ویں درجہ کا اور تمام اصلوں میں ن (ن - ۱) ویں درجہ کا ہے اسلئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ممیز ایک عددی جزو ضربی سے ضرب کھاکر

$$ا_۰^{۲(ن-۱)} \prod (ع_۱ - ع_۲)^۲$$ کے مساوی ہے۔

اگر تفاعل ف (لا) میں ایک دوسرا متغیر ما داخل کرکے اسکو ہمذات بنایا جائے تو وہ دو تفاعل جنکا حاصل اسقاط ف (لا) کا ممیز ہے لا اور ما کے لحاظ سے ف (لا) کے تفرقی سر ہیں۔ اسی طرح بالعموم ن متغیروں کا کوئی ہمذات تفاعل ہو تو اسکا ممیز وہ حاصل اسقاط ہے جو ان متغیروں کو ن مساواتوں سے ساقط کرنے سے بنتا ہے جہاں یہ مساواتیں تفاعل کو باری باری سے ہر متغیر کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

(84) ## مثالیں

۱۔ $ا_۰ لا^۳ + ۳ ا_۱ لا^۲ + ۳ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰$

کا ممیز معلوم کرو۔

ہمیں یہاں دو مساواتوں

$$ا_۰ لا^۲ + ۲ ا_۱ لا + ا_۲ = ۰ ،$$

$$ا_۱ لا^۲ + ۲ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰ ،$$

کا حاصل اسقاط معلوم کرنا ہے۔ دفعہ ۱۵۰ کی رو سے ایک مشترک اصل کیلئے شرط ہے

$$۴ (ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲)(ا_۱ ا_۳ - ا_۲^۲) - (ا_۰ ا_۳ - ا_۱ ا_۲)^۲ = ۰$$

پس سروں کا یہ تفاعل ممیز ہے جس کو دفعہ ۱۵۴ کے ذریعہ ایک مقطع کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے:

$$\begin{vmatrix} ٠ & ا_٢ & ٢ا_١ & ا_٠ \\ ا_٢ & ٢ا_١ & ا_٠ & ٠ \\ ٠ & ا_٣ & ٢ا_٢ & ا_١ \\ ا_٣ & ٢ا_٢ & ا_١ & ٠ \end{vmatrix}$$

اسکی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ ممیز کی یہ قیمت وہی ہے جو دفعہ ۲۴ میں پہلے حاصل کیجا چکی ہے۔

۲۔ چار درجی

$$ا_٠ لا^٤ + ٤ ا_١ لا^٣ + ٦ ا_٢ لا^٢ + ٤ ا_٣ لا + ا_٤ = ٠$$

کا ممیز ایک مقطع کی شکل میں بیان کرو۔

یہاں مساواتوں

$$ا_٠ لا^٣ + ٣ ا_١ لا^٢ + ٣ ا_٢ لا + ا_٣ = ٠،$$

$$ا_١ لا^٣ + ٣ ا_٢ لا^٢ + ٣ ا_٣ لا + ا_٤ = ٠،$$

سے لا کو ساقط کرنا ہے۔ دفعہ ۱۵۴ کے طریقہ سے حاصل اسقاط ہے

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ا_٣ & ٣ا_٢ & ٣ا_١ & ا_٠ \\ ٠ & ا_٣ & ٣ا_٢ & ٣ا_١ & ا_٠ & ٠ \\ ا_٣ & ٣ا_٢ & ٣ا_١ & ا_٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ا_٤ & ٣ا_٣ & ٣ا_٢ & ا_١ \\ ٠ & ا_٤ & ٣ا_٣ & ٣ا_٢ & ا_١ & ٠ \\ ا_٤ & ٣ا_٣ & ٣ا_٢ & ا_١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

اسکو وہی ہونا چاہئے جو $ع^٣ - ٢٧ ج^٢$ ہے (دیکھو دفعہ ۶۸)۔

۳۔ بیزو کے اسقاط کے طریقہ سے چار درجی کے ممیز کو ایک مقطع کی

شکل میں بیان کرو۔

(85) ۴ ــ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{ع} \equiv \text{ا لا}^{م} + \text{ب ما}^{م} + \text{ج ی}^{م} = ۰ ،\ \text{جہاں لا} + \text{ما} + \text{ی} \equiv ۰$$

کا ممیز $\Delta_{م}$، مساوات

$$(\text{ب ج})^{\frac{1}{م-1}} + (\text{ج ا})^{\frac{1}{م-1}} + (\text{ا ب})^{\frac{1}{م-1}} = ۰$$

کو شکل $\Delta_{م} = ۰$ میں منطق بنانے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ بالخصوص $\Delta_{۳}$، $\Delta_{۴}$، $\Delta_{۵}$ کی قیمتیں محسوب کرو۔

اگر $\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} \equiv ۰$ سے ی کی قیمت لیکر اس قیمت کو دئے ہوئے تفاعل میں درج کیا جائے تو اس تفاعل میں دو متغیر رہ جائینگے اور

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = ۰ ،\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = ۰$$

سے لا اور ما کو ساقط کرنے پر ممیز ملجائیگا۔

۵ ــ اسقاط سے ثابت کرو کہ مثال (۲)، کے چار درجی کی تین اصلوں کے مساوی ہونیکے لئے ایک شرط ج = ۰ ہے۔

چونکہ یہ تہری اصل مساوات

$$\text{ع}_{۳} \equiv \text{ا}_{۰}\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ا}_{۱}\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ا}_{۳} = ۰$$

کی ایک دوہری اصل اور مساوات

$$\text{ا}_{۱}\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ا}_{۳} = ۰$$

کی ایک واحد اصل ہونی چاہئے اور چونکہ مساوات

$$\text{ع}_{۲} \equiv \text{ا}_{۰}\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ا}_{۲} = ۰$$

کی بھی ایک واحد اصل ہونی چاہئے اسلئے متماثلہ

$$\text{ع}_{۴} \equiv \text{لا}^{۲}\text{ع}_{۲} + ۲\,\text{لا}(\text{ا}_{۱}\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ا}_{۳}) + \text{ا}_{۲}\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ا}_{۳}\text{لا} + \text{ا}_{۴}$$

سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یہ تیسری اصل حسب ذیل تین مساواتوں کی ایک مشترک اصل ہونی چاہئے :-

$$\text{ا}_0 \text{لا}^2 + 2\,\text{ا}_1 \text{لا} + \text{ا}_2 = 0$$
$$\text{ا}_1 \text{لا}^2 + 2\,\text{ا}_2 \text{لا} + \text{ا}_3 = 0$$
$$\text{ا}_2 \text{لا}^2 + 2\,\text{ا}_3 \text{لا} + \text{ا}_4 = 0$$

پس شرط ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_0 & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \end{vmatrix} \equiv \text{ج} = 0$$

۶ ـ ثابت کرو کہ دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا ممیز ایکے ممیزوں کے حاصل ضرب کو حاصل اسقاط کے مربع سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۵۱ اور دفعہ ہذا کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے یہ نتیجہ واضح ہے کیونکہ تمام اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب مشتمل ہے ہر مساوات کی جداگانہ اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب اور اُن فرقوں کے حاصل ضرب کے مربع پر جو ایک مساوات کی ہر اصل کے ساتھ دوسری مساوات کی سب اصلوں کو لینے سے بنتے ہیں۔

۱۵۸ ـ دو مساواتوں کی مشترک اصل کی تعیین ـ اگر دو مساواتوں (86)

$$\text{ع} \equiv \text{ا}_\text{م} \text{لا}^\text{م} + \text{ا}_{\text{م}-1} \text{لا}^{\text{م}-1} + \cdots\cdots + \text{ا}_0 = 0$$

$$\text{و} \equiv \text{ب}_\text{ن} \text{لا}^\text{ن} + \text{ب}_{\text{ن}-1} \text{لا}^{\text{ن}-1} + \cdots\cdots + \text{ب}_0 = 0$$

کا حاصل اسقاط س ہو اور کوئی مشترک اصل ع ہو تو

$$\text{ع} = \frac{\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{1}}}{\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}}} = \frac{\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{2}}}{\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{1}}} = \frac{\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{3}}}{\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{2}}} = \text{وغیرہ}$$

اس کو ثابت کرنیکے لئے ہم پہلے یہ دکھاتے ہیں کہ تفاعل فہ (لا) اور پہ (لا) حاصل ہو سکتے ہیں ایسے کہ کا ≡ ع فہ (لا) + و پہ (لا) یعنے جب ع اور و کو بالترتیب فہ (لا) اور پہ (لا) سے ضرب دیا جاتا ہے اور ان کو جمع کیا جاتا ہے تو وہ تمام ارقام جنہیں لا شامل ہوتا ہے متماثلاً معدوم ہوتی ہیں۔ مثلاً کا کی وہ شکل لو جو چوتھے اور تیسرے درجوں کے تفاعلوں کے لئے مثال ۲ دفعہ ۱۵۴ میں دی گئی ہے۔ دوسرے ستون کو لا سے ضرب دو، تیسرے کو لا^{2} سے، وغیرہ اور پہلے ستون میں جمع کرو تو پہلے ستون کے حسب ذیل عناصر حاصل ہوتے ہیں ع، لاع، لا^{2}ع، و، لاو، لا^{2}و، لا^{3}و۔ اسکے بعد مقطع کو پھیلاؤ تو وہ شکل ع فہ (لا) + و پہ (لا) اختیار کرتا ہے جہاں فہ، لا کا ایک دو درجی تفاعل ہے اور پہ تین درجی۔ ثبوت کا یہ طریقہ کسی دو تفاعلوں پر استعمال کیا جا سکتا ہے اور بالعموم اگر تفاعلوں ع اور و کے درجے م اور ن ہوں تو فہ اور پہ کے درجے ن - ۱ اور م - ۱ ہونگے۔ اسلئے

$$\text{کا} \equiv \text{ع فہ} + \text{و پہ}$$

جس سے

$$\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{\text{ٹ}}} \equiv \text{لا}^{\text{ٹ}}\,\text{فہ} + \text{ع}\,\frac{\text{فر فہ}}{\text{فر لا}_{\text{ٹ}}} + \text{و}\,\frac{\text{فر پہ}}{\text{فر لا}_{\text{ٹ}}} ،$$

$$\frac{\text{فر کا}}{\text{فر لا}_{\text{ٹ}+1}} \equiv \text{لا}^{\text{ٹ}+1}\,\text{فہ} + \text{ع}\,\frac{\text{فر فہ}}{\text{فر لا}_{\text{ٹ}+1}} + \text{و}\,\frac{\text{فر پہ}}{\text{فر لا}_{\text{ٹ}+1}} ،$$

اب اگر مساواتوں ع = ۰ اور و = ۰ کی ایک مشترک اصل عہ ہو تو اوپر کی مساواتوں میں لا کی یہ قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{عہ} = \frac{\text{فر سا}}{\text{فر ا}_{\text{ن}}} = \frac{\text{فر سا}}{\text{فر ا}_{\text{ن+۱}}}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اسی طرح ممیز Δ کو تفرق کرنے سے کسی مساوات کی دوہری اصل (87)
متعین کیجا سکتی ہے۔

جب مساواتوں ع = ۰ اور و = ۰ میں دو اصلیں مشترک ہوں تو $\text{ا}_{\text{ن}}$، $\text{ا}_{\text{ن+۱}}$ وغیرہ کے لحاظ سے سا کے پہلے تفرقی سر متماثلاً معدوم ہوتے ہیں اور اسلئے دوسرے تفرقی سر لینا ضروری ہے۔ اس صورت میں مساوات درجہ دوم

$$\frac{\text{فر}^2\text{ سا}}{\text{فر ا}_{\text{ن}}^2}\,\text{لا}^2 - 2\,\frac{\text{فر}^2\text{ سا}}{\text{فر ا}_{\text{ن}}\,\text{فر ا}_{\text{ن+۱}}}\,\text{لا} + \frac{\text{فر}^2\text{ سا}}{\text{فر ا}_{\text{ن+۱}}^2} = 0$$

کی اصلیں مشترک اصلوں کے طور پر حاصل ہوتی ہیں۔ یہ بات سا کی مندرجۂ بالا قیمت کو تفرق کرنے سے ظاہر ہے کیونکہ اس آخری مساوات کے پہلے رکن کا جملہ ذیل کے جملہ کے مساوی حاصل ہوتا ہے:-

$$\left(\frac{\text{فر}^2\text{ فہ}}{\text{فر ا}_{\text{ن}}^2}\,\text{لا}^2 - 2\,\frac{\text{فر}^2\text{ فہ}}{\text{فر ا}_{\text{ن}}\,\text{فر ا}_{\text{ن+۱}}}\,\text{لا} + \frac{\text{فر}^2\text{ فہ}}{\text{فر ا}_{\text{ن+۱}}^2}\right)\text{ع}$$

$$+\left(\frac{\text{فر}^2\text{ پہ}}{\text{فر ا}_{\text{ن}}^2}\,\text{لا}^2 - 2\,\frac{\text{فر}^2\text{ پہ}}{\text{فر ا}_{\text{ن}}\,\text{فر ا}_{\text{ن+۱}}}\,\text{لا} + \frac{\text{فر}^2\text{ پہ}}{\text{فر ا}_{\text{ن+۱}}^2}\right)\text{و}$$

اور یہ ایسا جملہ ہے کہ اگر اسمیں مشترک اصلوں میں سے کوئی اصل لا کی بجائے درج کیجائے تو یہ جملہ معدوم ہو جاتا ہے۔

اگر تین یا زیادہ مشترک اصلیں ہوں تو اسی طرح کا عمل صادق آئیگا۔

جن اصلوں کا اس باب میں ذکر آیا ہے اُنکی توضیح کے لئے حسب ذیل مثالیں دیجاتی ہیں۔

امثلہ

۱۔ مساواتوں

ا لا^2 + ب لا + ج = ۰،

لا^3 = ۱،

سے لا ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو لا سے ضرب دو تو، چونکہ لا^3 = ۱،

ب لا^2 + ج لا + ا = ۰.

اور پھر لا سے ضرب دینے سے

ج لا^2 + ا لا + ب = ۰.

اِن تین مساواتوں سے لا^2 اور لا کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ب & ج & ا \\ ج & ا & ب \end{vmatrix} = ۰$$

اگر متشاکل تفاعلوں کا طریقہ استعمال کیا جائے (دفعہ ۱۵۱) اور دوسری (88)
مساوات کی اصلیں پہلی مساوات میں درج کیجائیں تو حاصل اسقاط اس شکل میں ملتا ہے

(ا + ب + ج)(ا سہ^2 + ب سہ + ج)(ا سہ + ب سہ^2 + ج)

۲۔ اسی طرح مساواتوں

ا لا^4 + ب لا^3 + ج لا^2 + د لا + ع = ۰، لا^5 = ۱

سے لا ساقط کرو۔

نتیجہ پانچویں رتبہ کا ایک مستدیرہ ہے جو پچھلی مثال کے مطابق عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ متشاکل تفاعلوں کی مدد سے پانچ اجزائے ضربی لکھے لئے جا سکتے ہیں۔ بالعموم اس قسم کے کسی دو تفاعلوں پر ایسا ہی طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۳ — دفعہ ۱۵۲ کا طریقہ وہ شرطیں معلوم کرنیکے لئے استعمال کرو کہ دو کعبی مساواتوں

فہ (لا) ≡ ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د = ۰،

پہ (لا) ≡ اَ لا^{۳} + بَ لا^{۲} + جَ لا + دَ = ۰،

میں دو مشترک اصلیں ہوں۔

جب یہ صورت ہو تو فہ (لا) کو پہ (لا) کے تیسرے جزو ضربی سے اور پہ (لا) کو فہ (لا) کے تیسرے جزو ضربی سے ضرب دینے سے مماثل نتائج حاصل ہونے چاہئیں۔ اسلئے

(لَہ لا + مَہ) فہ (لا) ≡ (لہ لا + مہ) پہ (لا)

جہاں لہ، مہ، لَہ، مَہ، غیر معین مقداریں ہیں۔ اس متماثلہ سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:—

لَہ ا − لہ اَ = ۰

لَہ ب + مَہ ا − لہ بَ − مہ اَ = ۰

لَہ ج + مَہ ب − لہ جَ − مہ بَ = ۰

لَہ د + مَہ ج − لہ دَ − مہ جَ = ۰

مَہ د − مہ دَ = ۰

انمیں سے چار چار مساواتوں سے لَہ، مَہ، لہ، مہ کو ساقط کرنے سے پانچ مقطعات حاصل ہوتے ہیں جنکو صفر کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ شرطیں ملجاتی ہیں۔ اس قسم کی متعدد مساواتوں سے ساقط کرنیکا نتیجہ عموماً ایک سادہ سی ترقیم سے بیان کیا جاتا ہے۔ چنانچہ موجودہ صورت میں پانچ مقطعات کا منعدم ہونا

اس طور پر بیان کیا جاتا ہے :۔

ا	ب	ج	د	۰
۰	ا	ب	ج	د
اَ	بَ	جَ	دَ	۰
۰	اَ	بَ	جَ	دَ

= ۰

باری باری سے ہر ستون کو ترک کر دینے سے متذکرۂ بالا پانچ مقطعات بنتے ہیں۔ یہ بات مشاہدہ طلب ہے کہ محصلہ شرطیں دو شرطوں کے مماثل ہیں جو ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہیں اور یہ بتایا جا سکتا ہے کہ جب کوئی دو مقطعات معدوم ہوں تو باقی تین بھی معدوم ہونے چاہئیں ۔ (89)

۴ ۔ متماثلہ ذیل کو ثابت کرو :۔

عہ^{2}	۲ عہ بہ	بہ^{2}
عہ عہَ	عہ بہَ + عہَ بہ	بہ بہَ
عہَ^{2}	۲ عہَ بہَ	بہَ^{2}

= (عہ بہَ - عہَ بہ)^{3}

مساواتوں

عہ لا + بہ ما = ۰ ، عہَ لا + بہَ ما = ۰

سے لا اور ما اور ان مساواتوں سے اخذ کردہ مساواتوں

(عہ لا + بہ ما)^{2} = ۰ ، (عہ لا + بہ ما) (عہَ لا + بہَ ما) = ۰ ، (عہَ لا + بہَ ما)^{2} = ۰

سے لا^{2} ، لا ما ، اور ما^{2} ساقط کرنے سے متماثلہ مندرجۂ بالا ثابت ہو جاتی ہے کیونکہ اسکے دائیں جانب کا مقطع آخر کی تین مساواتوں سے لا^{2} ، لا ما ، اور ما^{2} کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور یہ مقطع اس مقطع کی تیسری قوت کے متماثلاً مساوی ہونا چاہئے جو خطی مساواتوں سے لا اور ما کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے ۔

۵ ۔ اسی طرح ثابت کرو

عہ^{3}	۳ عہ^{2} بہ	۳ عہ بہ^{2}	بہ^{3}
عہ^{2} عہَ	عہ^{2} بہَ + ۲ عہ عہَ بہ	۲ عہ بہ بہَ + عہَ بہ^{2}	بہ^{2} بہَ
عہ عہَ^{2}	عہَ^{2} بہ + ۲ عہ عہَ بہَ	۲ عہَ بہ بہَ + عہ بہَ^{2}	بہ بہَ^{2}
عہَ^{3}	۳ عہَ^{2} بہَ	۳ عہَ بہَ^{2}	بہَ^{3}

≡ (عہ بہَ - عہَ بہ)^{6}

۶ ــ چار مساواتوں

عَ = (لہ عہ + مہ) / (لَہ عہ + مَہ) ، بَہ = (لہ بہ + مہ) / (لَہ بہ + مَہ) ، وغیرہ

(جو ہم رسم استحالہ میں متغیروں کے باہمی رشتہ کو تعبیر کرتی ہیں) سے لہ، مہ، لَہ، مَہ ساقط کرکے مثال ۱۳ صفحہ ۸۵ کا نتیجہ ثابت کرو۔

۷ ــ اگر

ع ≡ ا ع² + ۲ ب ع و + ج و² ،

و ≡ اَ ع² + ۲ بَ ع و + جَ و² ،

ع ≡ ا لا² + ۲ ب لا ما + ج ما² ،

و ≡ اَ لا² + ۲ بَ لا ما + جَ ما² ،

تو ع اور و کو لا اور ما کے تفاعل سمجھکر انکا حاصل اسقاط معلوم کرو۔

چونکہ ع = ا (ع − عہ و) (ع − بہ و) ،

و = اَ (ع − عَہ و) (ع − بَہ و) ،

اسلئے اگر لا، ما کی مشترک قیمتوں کے لئے ع اور و معدوم ہوں تو اجزائے ضربی کا کوئی زوج مثلاً ع − عہ و اور ع − عَہ و معدوم ہونا چاہئے۔ پس ع − عہ و اور ع − عَہ و کا حاصل اسقاط بنانے اور ع اور و کے حاصل اسقاط کو سا (ع، و) سے تعبیر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

سا (ع − عہ و، ع − عَہ و) = (عہ − عَہ)² سا (ع، و)

اور ان تمام حواصل اسقاط کو ایک ساتھ ضرب دینے سے

سا (ع، و)~لا~ = ا² اَ² (عہ − عَہ)² (بہ − بَہ)² (عہ − بَہ)² (بہ − عَہ)² {سا (ع، و)}⁴

یا سا (ع، و)~لا~ = {سا (ع، و)}² {سا (ع، و)}⁴

۸ ــ ثابت کرو کہ مساواتوں (90)

ف (لا) = ۰ ، فَ (لا) + فً (لا) ۱/(۱×۲) + ما²/(۱×۲×۳) + ... = ۰ ،

سے لا کو ساقط کرنے پر وہ مساوات حاصل ہو سکتی ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات ف(لا) = ۰ کی اصلوں کے فرق ہوں۔

۹ — مساواتوں

لا + ما + ی = ۰،

ا ما ی + ب ی لا + ج لا ما = ۰،

ا ما^۳ ی^۳ + ب ی^۳ لا^۳ + ج لا^۳ ما^۳ = ۰،

سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

پہلی دو مساواتوں کے ساتھ ایک مفروضہ خطی مساوات

ل لا + م ما + ن ی = ۰

لو جسکے سر اختیاری ہیں اور لا، ما، ی کو ساقط کرو تو

ا ل^۲ + ب م^۲ + ج ن^۲ + (ا − ب − ج) م ن
+ (ب − ج − ا) ن ل + (ج − ا − ب) ل م = ۰ ..... (۱)

جسکو مساوات

(ل لا_۱ + م ما_۱ + ن ی_۱) (ل لا_۲ + م ما_۲ + ن ی_۲) = ۰ ..... (۲)

کے مماثل ہونا چاہئے جہاں لا_۱، ما_۱، ی_۱ اور لا_۲، ما_۲، ی_۲ وہ دو نظام ہیں لا، ما، ی کی قیمتوں کے جو دی ہوئی پہلی دو مساواتوں میں مشترک ہیں۔ ان قیمتوں کو دی ہوئی تیسری مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ک = (ا ما_۱^۳ ی_۱^۳ + ب ی_۱^۳ لا_۱^۳ + ج لا_۱^۳ ما_۱^۳) (ا ما_۲^۳ ی_۲^۳ + ب ی_۲^۳ لا_۲^۳ + ج لا_۲^۳ ما_۲^۳)

مساواتوں (۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے جو متشاکل تفاعل حاصل ہوں انکے ذریعہ ک کی مندرجۂ بالا قیمت کو تحویل کیا جائے تو

۴ ک = ۴ ف^۲ ق + ق^۲ + ۲۷ ف ر

جہاں ف = ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ − ۲ ب ج − ۲ ج ا − ۲ ا ب،

ق = ا ب ج (ا + ب + ج)،

ر = ا^۲ ب^۲ ج^۲

۱۰ — اگر لا کے تین تفاعل ع، و، ھ ہوں جنکے درجے علی الترتیب م، ن، م + ن − ۱ ہیں تو ثابت کرو کہ شکل ذیل کا ایک مماثل رشتہ موجود ہونا چاہئے

ر ھ ≡ ع فہ (لا) + و یہ (لا)

جہاں فہ (لا) اور یہ (لا) علی الترتیب ن − ۱ اور م − ۱ درجوں کے دریافت طلب تفاعل ہیں اور ر، ع اور و کا حاصل اسقاط ہے۔

۱۱ — ر کی دفعہ ۱۵۱ میں دی ہوئی قیمت کو تفرق کرنے سے دفعہ ۱۵۸ کے نتیجوں کی تصدیق کرو۔

پندرہواں باب

متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنا نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر

۱۵۹- $\text{س}_{\text{م}}$ اور $\text{ب}_{\text{م}}$ کیلئے ویرنگ (Waring) کے عام جملے

مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کے اہم ترین خواص پر پہلے بحث ہو چکی ہے (دفعات ۲۷، ۲۸، آٹھواں باب جلد اول)۔ اِس باب میں ہم چند مختلف مسئلوں کا اضافہ کرتے ہیں جو متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنے میں اکثر فائدہ کے ساتھ استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ ہم سب سے پہلے وہ عام جملے بیان کرینگے جنکا حوالہ دفعہ ۸۰ میں دیا جا چکا ہے اور جو ویرنگ سے منسوب ہیں۔

(۱) ن ویں درجہ کی مساوات کے سروں ب_1، ب_2، ب_3، ... $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی رقوم میں $\text{س}_{\text{م}}$ کے لئے عام جملہ۔

ہمیں معلوم ہے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ب}_1\text{ما}+\ldots+\text{ب}_{\text{ن}}\text{ما}^{\text{ن}})=\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\infty}\frac{(-1)^{\text{ر}}}{\text{ر}}(\text{ب}_1\text{ما}+\text{ب}_2\text{ما}^2+\ldots+\text{ب}_{\text{ن}}\text{ما}^{\text{ن}})^{\text{ر}}$$

$$=\text{س}_1\text{ما}+\frac{1}{2}\text{س}_2\text{ما}^2+\frac{1}{3}\text{س}_3\text{ما}^3+\ldots+\frac{1}{\text{م}}\text{س}_{\text{م}}\text{ما}^{\text{م}}+\ldots \quad (\text{دفعہ ۷۹})$$

اب کثیر رقمی مسئلہ سے $(\text{ب}_1\text{ما}+\text{ب}_2\text{ما}^2+\ldots+\text{ب}_{\text{ن}}\text{ما}^{\text{ن}})^{\text{ر}}$ کو پھیلانے

$$\text{ب}_{\text{م}} = \Sigma \frac{(-1)^{\text{ر}_1+\text{ر}_2+\dots+\text{ر}_{\text{م}}} \times \text{س}_1^{\text{ر}_1} \times \text{س}_2^{\text{ر}_2} \dots \text{س}_{\text{م}}^{\text{ر}_{\text{م}}}}{\text{جا}(\text{ر}_1+1)\,\text{جا}(\text{ر}_2+1)\dots\text{جا}(\text{ر}_{\text{م}}+1)\,2^{\text{ر}_2} \times 3^{\text{ر}_3} \times \dots \text{م}^{\text{ر}_{\text{م}}}}$$

جسمیں ر_1، ر_2، ....، $\text{ر}_{\text{م}}$ کو وہ سب مثبت قیمتیں (بشمول صفر) دینی چاہئیں جو مساوات

$$\text{ر}_1 + 2\,\text{ر}_2 + 3\,\text{ر}_3 + \dots + \text{م}\,\text{ر}_{\text{م}} = \text{م}$$

کو پورا کرتی ہیں ۔

۱۶۰ ـ دو مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعل ـ مساوات

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \dots + \text{ا}_{\text{م}} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

کی اصلیں ع_1، ع_2، ....، $\text{ع}_{\text{م}}$ ہیں اور مساوات

$$\text{پ}(\text{لا}) \equiv \text{ب}_0\,\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\,\text{ما}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{ما}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}} = 0 \quad \dots\dots (2)$$

کی اصلیں بہ_1، بہ_2، ....، $\text{بہ}_{\text{ن}}$ ہیں ـ اگر ایسے متشاکل تفاعل کو محسوب کرنا مطلوب ہو جسمیں اِن دونوں مساواتوں کی اصلیں شامل ہوتی ہیں تو ہم حسب ذیل عمل کرتے ہیں :ـ

ایک نیا متغیر ت مان لو جو لا اور ما کے ساتھ اس مساوات

$$\text{ت} = \text{ل}\,\text{لا} + \text{مہ}\,\text{ما}$$

سے مربوط ہے اور فرض کرو کہ اس مساوات کی مدد سے اور (۲) سے ما کو ساقط کیا گیا ہے ـ حاصل اسقاط لا میں ایک ن ویں درجہ کی مساوات ہے جسکے سروں میں ل، مہ، اور ت، ن ویں قوت میں شامل ہوتے ہیں ـ اب اس مساوات اور (۱) سے لا کو کسی ایک پچھلے طریقہ سے ساقط کرو تو ت میں م ن ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جسکی اصلیں جملہ ل ع + مہ بہ کی م ن قیمتیں ہیں ـ

(93)

اب اگر فہ (لا) اور پہ (لا) کے سروں کی رقوم میں کسی متشاکل تفاعل کو مثلاً ≥ عہ^ف بہ^ق کو محسوب کرنا مطلوب ہو تو ہم ت والی مساوات کی اصلوں کی (ف + ق) ویں قوتوں کا مجموعہ معلوم کرتے ہیں اس طرح ہمیں ≥ (لہ عہ + مہ بہ)^{ف+ق} کی قیمت اصلی سروں اور لہ اور مہ کی مختلف قوتوں کی رقوم میں معلوم ہو جاتی ہے۔ اس جملہ میں لہ^ف مہ^ق کے سرے ≥ عہ^ف بہ^ق کی مطلوبہ قیمت فہ (لا) اور پہ (لا) کے سروں کی رقوم میں معلوم ہو جائیگی۔

اگر تین مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنا مطلوب ہو تو فرض کرو کہ

ت = لہ لا + مہ ما + نہ ی

لا، ما، ی کو ساقط کرو اور اوپر کی طرح عمل کرو۔ غرض یہ طریقہ درست رہتا ہے خواہ مساواتوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔ سروں ار، بر، جر وغیرہ کو ار = بر = جر = . وغیرہ بنانے سے ہم ایک واحد مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں پر عود کرتے ہیں جنکو پہلے محسوب کیا جا چکا ہے۔

۱۶۱ ۔ اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں سے محسوب کرنا۔ حسب ذیل تفرقی مساوات کی مدد سے جو سروں کے ایک تفاعل کو قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں اسکی قیمت سے مربوط کرتی ہے متشاکل تفاعل بہت آسانی کے ساتھ اکثر محسوب کئے جا سکتے ہیں:۔

$$\frac{د}{د\,س_ر}\,فا(ب_1، ب_2، \ldots ب_ن) = -\frac{1}{ر}\left(\frac{د\,فا}{د\,ب_ر} + ب_1\frac{د\,فا}{د\,ب_{ر+1}} + \ldots + ب_{ن-ر}\frac{د\,فا}{د\,ب_ن}\right)$$

اس مساوات کو ثابت کرنیکے لئے ہم دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) لیتے ہیں اور اسکو میں ر کے لحاظ سے تفرق کرتے ہیں تو ما کی مختلف قوتوں کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}\,ب_{ق}}{\text{فر}\,س_{ر}} = ۰ \text{ جبکہ } ق < ر \text{ ، } \frac{\text{فر}\,ب_{ر}}{\text{فر}\,س_{ر}} = -\frac{۱}{ر} \text{ ، } \frac{\text{فر}\,ب_{ر+ک}}{\text{فر}\,س_{ر}} = -\frac{۱}{ر}\,ب_{ک}$$

اور ان قیمتوں کو مساوات

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر}\,س_{ر}}\,\text{فا}(ب_{۱}\text{، }ب_{۲}\text{، }\dots\text{، }ب_{ن}) = \frac{\text{فر فا}}{\text{فر}\,ب_{۱}}\,\frac{\text{فر}\,ب_{۱}}{\text{فر}\,س_{ر}} + \frac{\text{فر فا}}{\text{فر}\,ب_{۲}}\,\frac{\text{فر}\,ب_{۲}}{\text{فر}\,س_{ر}}$$

$$+ \dots + \frac{\text{فر فا}}{\text{فر}\,ب_{ن}}\,\frac{\text{فر}\,ب_{ن}}{\text{فر}\,س_{ر}}$$

میں درج کرنے سے اوپر لکھی ہوئی مساوات فوراً مل جاتی ہے۔

(94)

مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^{ن} + ب_{۱}\,لا^{ن-۱} + ب_{۲}\,لا^{ن-۲} + \dots + ب_{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\sum عہ_{۱}^{۲}\,عہ_{۲}^{۲}\,عہ_{۳}^{۲}\,عہ_{۴}^{۲}$ کی قیمت محسوب کرو۔

کسی متشاکل تفاعل کا رتبہ اور وزن معلوم کرنیکے بعد ہم اسکی قیمت کے حرفی حصے کو سروں کی رقوم میں لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $\sum$ دوسرے رتبہ کا ہے اور اسکا وزن آٹھ ہے۔ پس

$$\sum = ت\,ب_{۸} + ت_{۱}\,ب_{۷}\,ب_{۱} + ت_{۲}\,ب_{۶}\,ب_{۲} + ت_{۳}\,ب_{۵}\,ب_{۳} + ت_{۴}\,ب_{۴}^{۲}$$

جہاں ت، ت$_{۱}$، ت$_{۲}$، وغیرہ عددی سر ہیں جنکو معلوم کرنا ہے۔

$ب_{۶}\,ب_{۱}^{۲}$ ، $ب_{۵}\,ب_{۲}\,ب_{۱}$ ، $ب_{۵}\,ب_{۱}^{۳}$ جیسی رقمیں اگرچہ صحیح وزن کی ہیں مگر انکا رتبہ

ضرورت سے زیادہ بڑا ہے اور اسلئے Σ کے جملہ میں ایسی ارقام داخل نہیں ہو سکتیں۔ نیز اگر Σ کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو اسکی شکل فا $(س_{۲}، س_{۴}، س_{۶}، س_{۸})$ ہے کیونکہ بالعموم جب Σ $عم_{۱}^{ف} عم_{۲}^{ق} عم_{۳}^{ر}$ .... کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان کیا جاتا ہے تو وہ $س_{ف}، س_{ف+ق}، س_{ف+ق+ر}، ....، س_{کف}، ....$ جیسی رقموں سے بنتا ہے جنہیں سے سب کی سب جفت قوتوں کے مجموعے ہیں جبکہ ف، ق، ر، .... جفت ہوں۔ اسلئے اس صورت میں Σ کے جملہ میں صرف جفت قوتوں کے مجموعے داخل ہو سکتے ہیں۔

نیز چونکہ $\frac{جف\,\Sigma}{جف\,س_{۳}} = ۰$ اور $\frac{جف\,\Sigma}{جف\,س_{۱}} = ۰$ اسلئے $\frac{جف\,فا}{جف\,س_{۱}}$ کے لئے جو ضابطہ اوپر دیا گیا ہے اسکو استعمال کرنے سے

$ت_{۰} ب_{۷} + ت_{۱} ب_{۱} ب_{۶} + ت_{۳} ب_{۲} ب_{۵} + ت_{۲}(ب_{۱} ب_{۳} + ب_{۴}) + ۲ ت_{۴} ب_{۱} ب_{۳} = ۰$

اور $ت_{۰} ب_{۱} + ت_{۱} ب_{۱} = ۰$

ان مساواتوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ

$ت_{۰} + ت_{۱} = ۰،\ ت_{۳} + ت_{۴} = ۰،\ ت_{۲} + ت_{۰} = ۰،\ ت_{۱} + ۲ ت_{۴} = ۰$

لیکن $ت_{۴} = ۱$ کیونکہ چار رقمی کے لئے $\Sigma = ب_{۴}^{۲}$ اسلئے

$ت_{۱} = -۲،\ ت_{۰} = ۲،\ ت_{۳} = -۲،\ ت_{۲} = ۲$

اور $ت_{۰}، ت_{۱}، ت_{۲}، ت_{۳}، ت_{۴}$ کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے

$$\Sigma\, عم_{۱}^{۲} عم_{۲}^{۲} عم_{۳}^{۲} عم_{۴}^{۲} = ۲ ب_{۸} - ۲ ب_{۷} ب_{۱} + ۲ ب_{۶} ب_{۲} - ۲ ب_{۵} ب_{۳} + ب_{۴}^{۲}$$

۲ — اسی مساوات کے لئے $\Sigma\, عم_{۱}^{۲} عم_{۲}^{۲} عم_{۳}^{۲}$ کو محسوب کرو۔

جواب:- $-۲ ب_{۶} + ۲ ب_{۱} ب_{۵} - ۲ ب_{۲} ب_{۴} + ب_{۳}^{۲}$، (مقابلہ کرو دفعہ ۸۲ مثال ۶)

۳ ۔ اُسی مساوات کیلئے $\Sigma\, عہ_{۱}^{۳} عہ_{۲}^{۲} عہ_{۳}$ کی قیمت محسوب کرو۔

یہاں وزن چھ اور رتبہ تین ہے ۔ پس

$$\Sigma\, عہ_{۱}^{۳} عہ_{۲}^{۲} عہ_{۳} = ت_{٠} ب_{۶} + ت_{۱} ب_{۵} ب_{۱} + ت_{۲} ب_{۴} ب_{۲} + ت_{۳} ب_{۴} ب_{۱}^{۲}$$

$$+ ت_{۴} ب_{۳}^{۲} + ت_{۵} ب_{۱} ب_{۲} ب_{۳} + ت_{۶} ب_{۲}^{۳}$$

نیز $س_{۱}$، $س_{۲}$، $س_{۳}$، وغیرہ کی رقوم میں Σ کو بیان کرنے سے (دفعہ)

$$\Sigma\, عہ_{۱}^{۳} عہ_{۲}^{۲} عہ_{۳} = س_{۱} س_{۲} س_{۳} - س_{۱} س_{۵} - س_{۳}^{۲} - س_{۲} س_{۴} + ۲ س_{۶}$$

اب $س_{۶}$ کے لحاظ سے Σ کی اِن دو قیمتوں کو تفرق کرنے اور تفرقی سروں کا مقابلہ کرنے سے

(95)

$$ت_{٠} \frac{جف\, ب_{۶}}{جف\, س_{۶}} = - \frac{ت_{٠}}{۶} = ۲ \quad \text{یعنے} \quad ت_{٠} = - ۱۲ ،$$

$س_{۵}$ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$ت_{٠} ب_{۱} + ت_{۱} ب_{۱} = ۵ س_{۱} = - ۵ ب_{۱} \therefore ت_{۱} = ۷$$

$س_{۴}$ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$ت_{٠} ب_{۲} + ت_{۱} ب_{۱}^{۲} + ت_{۲} ب_{۲} + ت_{۳} ب_{۱}^{۲} = ۴ س_{۲} = ۴ (ب_{۱}^{۲} - ۲ ب_{۲})$$

جس سے $ت_{٠} + ت_{۲} = - ۸$ ، $ت_{۱} + ت_{۳} = ۴$

اور اسلئے $ت_{۳} = - ۳$ ، $ت_{۲} = ۴$

نیز $ت_{۶} = ٠$ کیونکہ Σ معدوم ہوتا ہے جب، (ن - ۲) اصلیں معدوم ہوں ۔ اور $ت_{۴}$ اور $ت_{۵}$ معلوم ہو جاتے ہیں اگر ہم وہ صورت لیں جب، (ن - ۳) اصلیں معدوم ہوں کیونکہ اس صورت میں

$$\Sigma\, عہ_{۱}^{۳} عہ_{۲}^{۲} عہ_{۳} = عہ_{۱} عہ_{۲} عہ_{۳} \Sigma\, عہ_{۱}^{۲} عہ_{۲} = - ب_{۳} (- ب_{۱} ب_{۲} + ۳ ب_{۳})$$

$$= ب_{۱} ب_{۲} ب_{۳} - ۳ ب_{۳}^{۲}$$

اوراسلئے $\text{ت}_{۴} = -۳$، $\text{ت}_{۵} = ۱$ - اسلئے بالآخر

$$\sum \text{ع}_{۱}^{۲}\,\text{ع}_{۲}^{۲}\,\text{ع}_{۳}^{۲} = -۱۲\,\text{ب}_{۶} + ۷\,\text{ب}_{۱}\,\text{ب}_{۵} + ۴\,\text{ب}_{۴}\,\text{ب}_{۲} - ۳\,\text{ب}_{۴}\,\text{ب}_{۱}^{۲} - ۳\,\text{ب}_{۳}^{۲} + \text{ب}_{۱}\,\text{ب}_{۲}\,\text{ب}_{۳}$$

۱۶۲ — کعبی کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل

اس دفعہ اور دفعات ذیل میں وہ مسائل بیان کئے گئے ہیں جو کعبی اور چار درجی مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی چند مخصوص جماعتوں کو محسوب کرنے میں سب سے زیادہ مفید ہیں ۔ یہ مسائل ان تفاعلوں کے متبوع غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی تعداد متعین کرنے کے لحاظ سے بھی بڑی اہمیت رکھتے ہیں ۔

مسئلہ ۱ — مساوات

$$\text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ا}_{۲}\,\text{لا} + \text{ا}_{۳} = ۰$$

کی اصلوں کا ہر منطق اور صحیح متشاکل تفاعل فہ (عہ، بہ، جہ) جسمیں صرف ان اصلوں کے فرق شامل ہوتے ہیں $\text{ا}_{۰}^{\text{ن}}$ سے ضرب کھانیکے بعد شکل فا (ا، ھ، ۵) یا گ فا (ا، ھ، ۵) میں بیان ہو سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ اصلوں کا جفت یا طاق تفاعل ہے جہاں فا ایک منطق صحیح تفاعل ہے ا، ھ، ۵ کا اور ن رتبہ ہے فہ کا ۔

پہلے حسب ذیل مسئلہ تمہیدیہ ثابت کرنا ضروری ہے :۔ ھ اور ۵ کا

کوئی ایسا تفاعل موجود نہیں ہے جو اِ سے تقسیم پذیر ہو۔ کیونکہ اگر کوئی ایسا تفاعل فاِ (ھ، ۵) ہوتا تو اِ کو معدوم کرنے سے ہمیں ملنا چاہیئے

فاِ (ھَ، ۵َ) ≡ ۰، جہاں ھَ = - اِ²۲، ۵َ = ۴ اِ³۱ اِ۳ - ۳ اِ²۱ اِ²۲

جو ھ اور ۵ کی قیمتیں ہیں جب ، اِ معدوم ہو (دفعہ ۴۲)۔ یہ مساوات صریحاً ناممکن ہے کیونکہ اگر ہم مساوات ھَ = - اِ²۲ کی مدد سے اِ۱ کو ساقط کریں تو حاصل ہونیوالی مساوات میں اِ۲ اور اِ۳ شامل ہونگے اور ھَ اور ۵َ بھی ۔

مسئلہ ا کا ثبوت :۔ فہ چونکہ فرقوں کا تفاعل ہے ہم فرض (96)
کر سکتے ہیں کہ وہ ایسے کعبی سے محسوب کیا گیا ہے جسمیں اسکی دوسری رقم موجود نہیں ہے (دفعہ ۳۶)۔ اس لئے

اِرٌ فہ (عہ، بہ، جہ) = فا (اِ، ھ، گ)

جس میں فا ایک منطق صحیح تفاعل ہے اور ر کو جو ۰ سے کم نہیں ہو سکتا (دفعہ ۸۱) معلوم کرنا باقی ہے ۔ بائیں طرف کے تفاعل کو گ کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیکر ہم لکھ سکتے ہیں

اِرٌ فہ (عہ، بہ، جہ) = فا (اِ، ھ) + گ فا۱ (اِ، ھ) + گ² فا۲ (اِ، ھ) + ...

چونکہ ھ کا وزن جفت ہے اسلئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب ، فہ ، اصلوں کا جفت تفاعل ہو (یعنے اسکا وزن جفت ہو) تو وہ سب ارقام جنمیں گ کی طاق قوتیں شامل ہوتی ہیں معدوم ہونی چاہیئں اور جب ، فہ ، طاق تفاعل ہو تو فا ۔ اور وہ سب ارقام جنمیں گ کی جفت قوتیں شامل ہوں معدوم ہونی چاہیئں ۔ موخرالذکر صورت میں گ کو جزو ضربی کے طور پر لیتے اور ربط

گ² + ۴ ھ³ = اِ²۲ ۵ (دفعہ ۴۲)

کے ذریعہ گ کی جفت قوتوں کو ساقط کرنے سے یہ ثابت ہو جاتا ہے کہ اُر فہ شکل

فا (اِ، ھ، ۵) یا گ فا (اِ، ھ، ۵)

میں بیان ہو سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ جفت یا طاق ہو۔

اسلئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اصلوں کے ہر طاق تفاعل میں جو متذکرہ بالا جماعت سے متعلق ہو یہ جملہ

(۲عہ - بہ - جہ) (۲بہ - جہ - عہ) (۲جہ - عہ - بہ) (مثال ۱۵ دفعہ ۲۷)

جزو ضربی کے طور پر شریک ہونا چاہئے۔

ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ یہ جزو ضربی تفاعل فہ سے جدا کر دیا گیا ہے اور اسکے ساتھ ہی مساوات کی دوسری طرف سے سروں کی رقوم میں اس جزو ضربی کی قیمت نکال دیگئی ہے۔ اب صرف اصلوں کے جفت تفاعل کی صورت میں ر کی قیمت معلوم کرنا باقی رہ گیا ہے۔ رابط کو شکل

اِر فہ (عہ، بہ، جہ) = فا (اِ، ھ، ۵)

میں لکھو۔ بائیں طرف کے تفاعل کو اِ کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دو اور مساوات کی طرفین کو اِر-۵ سے تقسیم کرو تو

اِ۵ فہ (عہ، بہ، جہ) = فا (اِ، ھ، ۵) + ع + فان (ھ، ۵) / اِن

جہاں فا ایک صحیح تفاعل ہے اِ، ھ، ۵ کا اور ع میں تمام کسری

(۹۷) ارقام شامل ہیں۔ اب چونکہ فہ ایک متشاکل تفاعل ہے جس کا رتبہ ۵ ہے اسلئے اِ۵ فہ سروں کے ایک صحیح تفاعل کے طور پر بیان ہو سکتا ہے۔ اور چونکہ اوپر ثابت کردہ ابتدائی مسئلہ کی رو سے ع میں شامل ہونیوالی کوئی رقم غیر مکسور صورت میں بیان نہیں ہو سکتی اس لئے کسری حصہ معدوم ہونا چاہئے اور مساوات شکل

اُ فہ (عہ، یہ، جہ) = فا (ا، ھ، ے)

اختیار کرتی ہے۔

اس طرح مسئلہ ثابت ہو گیا۔

۱۶۳ — چار درجی کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل۔

دفعہ گذشتہ کے مسئلہ کے جواب میں چار درجی کے لئے حسب ذیل مسئلہ ہے:۔

مسئلہ ۲ — مساوات

ا لا^۴ + ۴ ا لا^۳ + ۶ ا لا^۲ + ۴ ا لا + ا = ۰

کی اصلوں کا ہر منطق اور صحیح متشاکل تفاعل فہ (عہ، یہ، جہ، ضہ) جس میں صرف اِن اصلوں کے فرق شامل ہوتے ہیں اُسے ضرب کھانیکے بعد شکل فا (ا، ھ، ع، جے) یا گ فا (ا، ھ، ع، جے) میں بیان ہو سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ اصلوں کا جفت یا طاق تفاعل ہے جہاں فا ایک منطق صحیح تفاعل ہے ا، ھ، ع، جے کا اور ہ رتبہ ہے فہ کا۔

پہلے حسب ذیل مسئلہ تمہیدیہ کا ثابت کرنا ضروری ہے:۔
ھ، ع، جے کا کوئی ایسا تفاعل موجود نہیں ہے جو ا سے تقسیم پذیر ہو۔ کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایسا تفاعل فا (ھ، ع، جے) ہے تو ا کو معدوم کرنے سے ہمیں ملنا چاہئے

فا (ھَ، ع، جےَ) = ۰۔

جہاں

ھَ = - ا^۲

عَ = -۴ اِ ا۳ + ۳ اِ۲ ،

جَ = ۲ اِ اِ ا۳ - اِ اِ۲ - اِ۳ ،

جو ھ ، ع ، اور ج کی قیمتیں ہیں جب ، اِ معدوم ہو۔ لیکن ایسی مساوات متماثلہ کا وجود نہیں ہو سکتا کیونکہ اِ ، اِ ، ا۳ کو اس طور پر ساقط کرنا کہ صرف ھَ ، عَ ، جَ کے درمیان ایک ربط حاصل ہونا ممکن ہے۔

اب دفعہ ماسبق کے مطابق فہ چونکہ اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہے اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وہ ایسی چار درجی مساوات سے محسوب کیا گیا ہے جسمیں اسکی دوسری رقم موجود نہیں ہے (دفعہ ۳۷) پس

اِرَ فہ (عہ ، بہ ، جہ ، ضہ) = فا (اِ ، ھ ، ع ، گ)

جسمیں فا ایک منطق صحیح تفاعل ہے اور ر کو معلوم کرنا باقی ہے۔ حسب سابق عمل کرنے سے

اِرَ فہ (عہ ، بہ ، جہ ، ضہ) = فا (اِ ، ھ ، ع) + گ فا۱ (اِ ، ھ ، ع)

+ گ۲ فا۲ (اِ ، ھ ، ع) + ...

چونکہ ھ اور گ دونوں تفاعلوں کی صورت میں وزن جفت ہے اسلئے دفعہ گذشتہ کے مطابق یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ طاق تفاعلوں میں گ ایک جزو ضربی ہے اور ربط (98)

گ۲ = اِ۲ (ھ ع - اِ جَ) - ۴ ھ۳ (دفعہ ۳۷)

کے ذریعہ گ کی جفت قوتوں کو ساقط کرنے سے یہ ثابت ہو جاتا ہے کہ اِرَ فہ شکل

فا (اِ ، ھ ، ع ، جَ) یا گ فا (اِ ، ھ ، ع ، جَ)

میں بیان ہو سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ جفت یا طاق تفاعل ہو۔ اسلئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اصلوں کے ہر طاق تفاعل میں جو متذکرہ صدر جماعت سے متعلق ہے جملہ

(بہ + جہ - عہ - ضہ) (جہ + عہ - بہ - ضہ) (عہ + بہ - جہ - ضہ)

(مثال ۲۰ دفعہ ۲۷)

جزو ضربی کے طور پر شریک ہونا چاہیئے۔

اس جزو ضربی کو جدا کرکے اب ہم جفت تفاعل کی صورت میں رکو متعین کرتے ہیں۔ ربط کو اس شکل

ا٫ فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) = فا (ا، ھ، ع، جے)

میں لکھنے اور ا٫ ^ن^ سے تقسیم کرنے سے ہمیں حسب دفعہ گزشتہ حاصل ہوتا ہے

ا٫ فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) = فا (ا، ھ، ع، جے) + ۳ $\frac{\text{فاٗ (ھ، ع، جے)}}{\text{اٗ}}$

اب چونکہ بائیں طرف کا جملہ سروں کا ایک صحیح تفاعل ہونا چاہیئے (دفعہ ۸۱) اور چونکہ ثابت کردہ تمہیدیہ کی رو سے ۳ میں داخل ہونیوالی کوئی رقم غیر مکسور صورت میں بیان نہیں ہو سکتی اسلئے

ا٫ فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) = فا (ا، ھ، ع، جے)

اس طرح مسئلہ ثابت ہو گیا۔

اس باب کے ختم پر ایسی مثالیں ملینگی جنمیں چار درجی کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنے میں اس مسئلہ کے استعمال سے فائدہ اٹھایا جا سکتا ہے۔

۱۶۴۔ نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر۔ فرض کرو کہ ثنائی سروں کے ساتھ لکھی ہوئی عام مساوات

ا٫ لا^ن^ + ن ا٫ لا^ن-۱^ + $\frac{\text{ن (ن - ۱)}}{\text{۱ × ۲}}$ ا٫ لا^ن-۱^ + ... + اٗن = ۰

کی اصلیں ع۱، ع۲، ع۳، .... عن ہیں۔ اب ہم لا کے تفاعلوں کی ایک خاص اور اہم جماعت پر بحث کرینگے جو اصلوں کے ایک دئے ہوئے متشاکل تفاعل کے ذریعہ اخذ کیئے جا سکتے ہیں۔ (99)

پچھلے دو دفعات میں ہماری توجہ اصلوں کے چند خاص قسم کے متشاکل متجانس تفاعلوں پر رہی ہے جنہیں اصلوں کے صرف فرق شامل ہوتے ہیں (دیکھو دفعہ ۳۶)۔ ایسے تفاعلوں کو ہم نیم غیر متغیر کہہ سکتے ہیں جسکی وجہ کسی آئندہ باب میں ملیگی۔ چونکہ یہ اصلوں کے متشاکل تفاعل ہیں اسلیئے انکو (جب انکو ا۰ کی ایک قوت سے ضرب دیا جاتا ہے) سروں کی رقوم میں ایک منطق اور صحیح شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

اسی طرح ہم اصطلاح "نیم ہم متغیر" ایسے تفاعلوں کو تعبیر کرنیکے لئے استعمال کر سکتے ہیں جو مقداروں لا، ع۱، ع۲، ع۳.. عن کے فرقوں سے اس طرح بنتے ہیں کہ جب انکو لا کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جاتا ہے تو لا کے متواتر سر اسی طرح اصلی سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

اب ہم یہ بتائینگے کہ نیم ہم متغیر کس طرح پیدا ہوتے ہیں اور انکو لا کی قوتوں کے لحاظ سے کس طرح پھیلایا جا سکتا ہے جبکہ انہیں اصلوں کی رقوم میں یا سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے۔

کوئی ربط ذیل کی شکل کا لو

$$ا_۰^ہ \, ف (ع_۱، ع_۲، .... ، ع_ن) = فا (ا_۰، ا_۱، ا_۲، ... ، ا_ن)$$

جہاں ف ایک صحیح تفاعل ہے جسکا رتبہ ہ ہے اور فا سروں کی رقوم میں متناظر جملہ ہے۔ تب ہم ہر اصل کو بقدر لا کے گھٹانے اور اسکے جواب میں ہر سر ار کو عر میں بدلنے سے (دیکھو دفعہ ۳۵) حسب ذیل مساوات اخذ کرتے ہیں:۔

ا۰ن فہ (عہ۱ - لا، عہ۲ - لا، ..... عہن - لا) = فا(ع۰، ع۱، ع۲، .... عن) (۱)

اس طرح نیم ہم متغیر کے لئے دو شکلیں حاصل ہوتی ہیں ایک اصلونکی رقوم میں بیان کردہ اور دوسری سرول کی رقوم میں۔

اس مساوات کے پہلے رکن کو ٹیلر کے مسئلہ سے لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو

فہ (عہ۱ - لا، عہ۲ - لا، .... عہن - لا) = فہ + لا مف فہ + لا۲/(۱×۲) مف۲ فہ + ... (۲)

(100)

جہاں فہ ≡ فہ (عہ۱، عہ۲، .... عہن)

اور مف ≡ جف/جف عہ۱ + جف/جف عہ۲ + ... + جف/جف عہن

اب لا کی ایک سے بڑی قوتوں کو نظرانداز کرنے سے دوسرا رکن ہو جاتا ہے

فا(ا۰، ا۱ + ا۰ لا، ا۲ + ۲ ا۱ لا، .... ان + ن ان-۱ لا)

اور اسکو پھیلایا جائے تو

فا(ا۰، ا۱ + ا۰ لا، ا۲ + ۲ ا۱ لا، .... ان + ن ان-۱ لا) = فا + لا عف فا + ...

جہاں فا ≡ فا (ا۰، ا۱، ا۲، .... ان)

اور عف ≡ ا۰ جف/جف ا۱ + ۲ ا۱ جف/جف ا۲ + ۳ ا۲ جف/جف ا۳ + ... + ن ان-۱ جف/جف ان

دونوں پھیلائی ہوئی شکلوں کا مقابلہ کرنے سے

اُ مف فہ(عہ$_1$، عہ$_2$، ... عہ$_ن$) = عف فا(ا$_1$، ا$_2$، ... ا$_ن$)

اور اسلئے عاملوں مف اور عف کو متواتر استعمال کرنے سے

اُ^{ل} مف^ل فہ (عہ$_1$، عہ$_2$، ... عہ$_ن$) = عف^ل فا (ا$_1$، ا$_2$، ... ا$_ن$)

اسلئے پھیلاؤ (٢) سے ہم یہ استنباط کرتے ہیں کہ

فا(ع$_1$، ع$_2$، ... ع$_ن$) = فا + لا عف فا + $\frac{\text{لا}^2}{1\times 2}$ عف^2 فا + ...

پس اِن دو عاملوں (یعنے سروں کی رقوم میں عف اور اصلوں کی رقوم میں مف) کی مدد سے مساوات (١) کے کسی طرف کے رکن کو ہم لا کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ مف کے متواتر اعمال کے ذریعہ اصلوں کے تفاعلوں کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور عف کے ذریعہ اِن تفاعلوں کے جواب میں اِنکی قیمتیں سروں کی رقوم میں ملتی ہیں۔

محصلہ بالا نتائج اسی طرح درست رہتے ہیں اگر تفاعل فہ میں دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کی اصلیں شامل ہوں۔ ایسی صورت میں فاُ اِن مساواتوں کے سروں کی رقوم میں متناظر قیمت کو تعبیر کریگا اور عف اور مف کی بجائے ہر مساوات کے لحاظ سے اسی طرح کے عاملوں کے مجموعے ہونگے۔

(101) یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب مف فہ متماثلاً معدوم ہوتا ہے تو

مف (مف فہ) یا مف^2 فہ ≡ ٠، مف^3 فہ ≡ ٠، وغیرہ

اور اسلئے مساوات (١) کے پہلے رکن کے پھیلاؤ میں لا معدوم ہوتا ہے اب یہ صرف اُسوقت واقع ہو سکتا ہے جبکہ فہ مقداروں

عہ$_1$، عہ$_2$، ... عہ$_ن$ کے فرقوں کا تفاعل ہو۔ پس ہم اس نتیجہ پر

پہنچتے ہیں کہ اگر فا(ا$_1$، ا$_2$، ... ا$_ن$) نیم غیر متغیر ہو تو

اِ$_ن$ مف فہ (ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$، ...، ع$_ن$) = عف فا (اِ، اِ$_1$، اِ$_2$، ...، اِ$_ن$)

اور اسلئے عاملوں مف اور عف کو متواتر استعمال کرنے سے

اِ$_ن$ مف^ر فہ (ع$_1$، ع$_2$، ...، ع$_ن$) = عف^ر فا (اِ، اِ$_1$، اِ$_2$، ...، اِ$_ن$)

اسلئے پھیلاؤ (۲) سے ہم یہ استنباط کرتے ہیں کہ

فا (ع، ع$_1$، ع$_2$، ...، ع$_ن$) = فا + لا عف فا + $\frac{لا^2}{1\times 2}$ عف^2 فا + ...

پس اِن دو عاملوں (یعنے سروں کی رقوم میں عف اور اصلوں کی رقوم میں مف) کی مدد سے مساوات (۱) کے کسی طرف کے رکن کو ہم لا کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں ۔ مف کے متواتر اعمال کے ذریعہ اصلوں کے تفاعلوں کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور عف کے ذریعہ اِن تفاعلوں کے جواب میں اِنکی قیمتیں سروں کی رقوم میں ملتی ہیں ۔

محصلۂ بالا نتائج اسی طرح درست رہتے ہیں اگر تفاعل فہ میں دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کی اصلیں شامل ہوں ۔ ایسی صورت میں فا، اِن مساواتوں کے سروں کی رقوم میں متناظر قیمت کو تعبیر کریگا اور عف اور مف کی بجائے ہر مساوات کے لحاظ سے اسی طرح کے عاملوں کے مجموعے ہونگے ۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب 'مف فہ' متماثلاً معدوم ہوتا ہے تو (101)

مف (مف فہ) یا مف^2 فہ ≡ ۰، 'مف^3 فہ ≡ ۰'، وغیرہ

اور اسلئے مساوات (۱) کے پہلے رکن کے پھیلاؤ میں لا معدوم ہوتا ہے اب یہ صِرف اُسوقت واقع ہو سکتا ہے جبکہ فہ 'مقداروں ع$_1$، ع$_2$، ...، ع$_ن$ کے فرقوں کا تفاعل ہو ۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر فا (اِ، اِ$_1$، اِ$_2$، ...، اِ$_ن$) نیم غیر متغیر ہو تو

عف فا (اِ، اِ، اِ، ..... اِ) ≡ ۰

جب رتبہ اور وزن معلوم ہوں تو نیم غیر متغیر میں عددی سروں کو متعین کرنیکے لئے اوپر کی متماثلہ مساوات اکثر کافی ہے۔ اگر ایک ہی رتبہ اور وزن کے دو یا دو سے زیادہ نیم غیر متغیر ہوں تو عف کے عمل سے اتنی مساواتیں نہیں ملینگی جتنی تمام مفروضہ سروں کو متعین کرنیکے لئے کافی ہونی چاہئیں ۔ یہ بات دفعہ آئندہ سے واضح ہو جائے گی۔ اگر مطلوبہ رتبہ اور وزن کا کوئی نیم غیر متغیر موجود نہ ہو تو سب کے سب سر معدوم ہو جائینگے ۔

۱۶۵ ۔ نیم غیر متغیروں کی تعیین ۔ ایک کثیر رقمی کے دئے ہوئے رتبہ (ہ) اور وزن (کہ) کے نیم غیر متغیر کو معلوم کرنیکا مسئلہ وہی ہے جو تفرقی مساوات

$$\text{عف فہا} \equiv \text{اِ}\frac{\text{فر فہا}}{\text{فر اِ}} + ۲\text{اِ}\frac{\text{فر فہا}}{\text{فر اِ}} + \dots + \text{ن اِ}\frac{\text{فر فہا}}{\text{فر اِ}} = ۰ \quad (۱)$$

کے ایسے تمام حل متعین کرنیکا ہے ۔

اس مساوات کو حل کرنیکے لئے (اگر اسکا حل کرنا ممکن ہو) فرض کرو کہ

$$\text{فہا} = \text{لہ}_۱\,\text{فہ}_۱ + \text{لہ}_۲\,\text{فہ}_۲ + \dots + \text{لہ}_ر\,\text{فہ}_ر \quad (۲)$$

جہاں اِ، اِ، اِ، ..... اِ کے تمام ممکن اجتماع جن کا رتبہ ہ اور وزن کہ ہے فہ۱، فہ۲، ..... فہر ہیں اور جہاں لہ۱، لہ۲، ..... لہر اختیاری اجزائے ضربی ہیں ۔

اب فہا کی اس قیمت کو مساوات عف فہا = ۰ میں درج کرنے سے

$$\text{ل}_۱\,\text{سا}_۱ + \text{ل}_۲\,\text{سا}_۲ + \dots + \text{ل}_ر\,\text{سا}_ر \equiv ۰$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سا_1، سا_2، سا_3، . . . ، $\text{سا}_{ق}$ وہ تمام مختلف ارقام ہیں جنکا رتبہ ہ اور وزن کہ-۱ ہے اور جہاں ل_1، ل_2، . . . ، $\text{ل}_{ق}$، لہ_1، لہ_2، . . . ، $\text{لہ}_{ق}$ کے خطی تفاعل ہیں جنکو معدوم ہو جانا چاہیے اگر قہا، نیم غیر متغیر ہے۔

لہ_1، لہ_2، . . . ، $\text{لہ}_{ر}$ کو متعین کرنیکے لئے حسب ذیل رشتے ہیں:- (102)

$$\left.\begin{aligned} \text{ل}_1 &\equiv \text{ل}_{11}\,\text{لہ}_1 + \text{ل}_{12}\,\text{لہ}_2 + \dots + \text{ل}_{1ر}\,\text{لہ}_{ر} = 0 \\ \text{ل}_2 &\equiv \text{ل}_{21}\,\text{لہ}_1 + \text{ل}_{22}\,\text{لہ}_2 + \dots + \text{ل}_{2ر}\,\text{لہ}_{ر} = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{ل}_{ق} &\equiv \text{ل}_{ق1}\,\text{لہ}_1 + \text{ل}_{ق2}\,\text{لہ}_2 + \dots + \text{ل}_{قر}\,\text{لہ}_{ر} = 0 \end{aligned}\right\} \dots\dots (۳)$$

اب تین مختلف صورتیں ہیں جنپر غور کرنا چاہیے:-

(۱) اگر ر، ف سے بڑا ہو تو مقداروں لہ_1، لہ_2، لہ_3، . . . ، $\text{لہ}_{ر}$ کو متعین کرنیکے لئے مساواتوں کی کافی تعداد نہیں ملتی لیکن ان میں سے کسی ف مقداروں کو باقی مقداروں کے خطی تفاعلوں کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ اِس غرض کے لئے ہم ذیل کا عمل کر سکتے ہیں:-

ر-ف ≡ ژ اختیاری اجزائے ضربی بناؤ جنکی تعریف حسب ذیل مساواتوں سے ہوتی ہے:-

$$\left.\begin{aligned} \text{م}_{11}\,\text{لہ}_1 + \text{م}_{12}\,\text{لہ}_2 + \dots\dots + \text{م}_{1ر}\,\text{لہ}_{ر} &= \text{ا}_1 \\ \text{م}_{21}\,\text{لہ}_1 + \text{م}_{22}\,\text{لہ}_2 + \dots\dots + \text{م}_{2ر}\,\text{لہ}_{ر} &= \text{ا}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{م}_{ژ1}\,\text{لہ}_1 + \text{م}_{ژ2}\,\text{لہ}_2 + \dots\dots + \text{م}_{ژر}\,\text{لہ}_{ر} &= \text{ا}_{ژ} \end{aligned}\right\} \dots\dots (۴)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) کو له_1، له_2، ..... $\text{له}_\text{ر}$ کیلئے حل کرنے اور مساوات (۲) میں درج کرنے سے ہمیں فہ کے لئے ذیل کی قیمت ملتی ہے:-

$$\Delta\, \text{فہ} = \text{ا}_1 \text{ح}_1 + \text{ا}_2 \text{ح}_2 + \text{ا}_3 \text{ح}_3 + \cdots + \text{ا}_\text{ڑ} \text{ح}_\text{ڑ}$$

اور اسلئے $\Delta\, \text{عف فہ} = \text{ا}_1 \text{عف ح}_1 + \text{ا}_2 \text{عف ح}_2 + \cdots + \text{ا}_\text{ڑ} \text{عف ح}_\text{ڑ} \equiv 0$

جس سے $\text{عف ح}_1 = 0$، $\text{عف ح}_2 = 0$، .....، $\text{عف}_\text{ڑ} \text{ح} = 0$

کیونکہ ا_1، ا_2، ... $\text{ا}_\text{ڑ}$ کوئی قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں۔

پس ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ اس صورت میں خطی طور پر غیر تابع نیم غیر متغیروں کی تعداد ر - ف ≡ ڑ ہے۔

(۲) جب 'ف' ر کے مساوی یا ر سے بڑا ہوتا ہے تو مساواتیں

$$\text{ل}_1 = 0،\ \text{ل}_2 = 0،\ \ldots\ \text{ل}_\text{ف} = 0$$

بالعموم پوری نہیں ہو سکتیں اور اسلئے کثیر رقمی کے کوئی ایسے نیم غیر متغیر نہیں ہیں جنکا رتبہ ہ اور وزن که ہے۔

(۳) جب 'ف = ر - ۱ تو له_1، له_2، .... $\text{له}_\text{ر}$ کو متعین کرنیکے لئے مساواتوں کی تعداد عین کافی ہوتی ہے اور اسلئے صرف ایک نیم غیر متغیر موجود ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ کعبی کیلئے وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ اور وزن دونوں تین ہیں۔

مان لو

$$\text{فہ} = \text{ا}\, \text{ا}_0^2 \text{ا}_3 + \text{ب}\, \text{ا}_0 \text{ا}_1 \text{ا}_2 + \text{ج}\, \text{ا}_1^3$$

کیونکہ یہی وہ تین ارقام ہیں جو مطلوبہ شرطوں کو پورا کرتی ہیں۔ عف کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ عمل کی تکمیل ہو جاتی ہے اگر ہم کسی سر ا ر کے لاحقہ پر وہی عمل کریں جو تفرق کے معمولی عمل میں قوت پر کیا جاتا ہے مثلاً عف ا ر = ر ا ر-۱ اور اسلئے

$$\text{عف فہ} = (۳\,\text{ا} + \text{ب})\,\text{ا}_۱^۲\,\text{ا}_۲ + (۲\,\text{ب} + ۳\,\text{ج})\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱ \equiv ۰$$

پس $۳\,\text{ا} + \text{ب} = ۰$، اور $۲\,\text{ب} + ۳\,\text{ج} = ۰$

اور $\text{ا} = ۱$ رکھنے سے $\text{ب} = -۳$، اور $\text{ج} = ۲$، پس بالآخر

$$\text{فہ} = \text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۳ - ۳\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱\,\text{ا}_۲ + ۲\,\text{ا}_۱^۳ \equiv \text{گ}$$ (دیکھو دفعہ ۳۶)

دو درجی کے لئے کوئی ایسا نیم غیر متغیر نہیں بنایا جا سکتا۔

۲۔ چار درجی کے وہ نیم غیر متغیر تلاش کرو جنکا رتبہ اور وزن دونوں چار ہیں۔ فرض کرو

$$\text{فہ} = \text{ا}\,\text{ا}_۰^۳\,\text{ا}_۴ + \text{ب}\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۱\,\text{ا}_۳ + \text{ج}\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۲^۲ + \text{د}\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱^۲\,\text{ا}_۲ + \text{غ}\,\text{ا}_۱^۴$$

تو

$$\text{عف فہ} = (۴\,\text{ا} + \text{ب})\,\text{ا}_۰^۳\,\text{ا}_۳ + (۳\,\text{ب} + ۴\,\text{ج} + ۲\,\text{د})\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۱\,\text{ا}_۲ + (۲\,\text{د} + ۴\,\text{غ})\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱^۳$$

یہاں ہمیں پانچ مفروضہ سروں کے درمیان صرف تین مساواتیں ملتی ہیں اور اسلئے انکی نسبتیں پوری طرح متعین نہیں ہو سکتیں۔ ب، ج اور د کو ا اور غ کی رقوم میں بیان کرو تو

$$\text{فہ} = \text{ا}\,\text{ا}_۰^۲(\text{ا}_۰\,\text{ا}_۴ - ۴\,\text{ا}_۱\,\text{ا}_۳ + ۳\,\text{ا}_۲^۲) + \text{غ}(\text{ا}_۰^۲\,\text{ا}_۲^۲ - ۲\,\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱^۲\,\text{ا}_۲ + \text{ا}_۱^۴)$$

یعنی $\text{فہ} = \text{ا}\,\text{ا}_۰^۲\,\text{ع} + \text{غ}\,\text{ھ}^۲$

جہاں ا اور غ کوئی قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں۔ اسلئے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اس صورت میں مطلوبہ وزن اور رتبہ کے دو بنیادی نیم غیر متغیر ہیں جو ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہیں یعنی $\text{ا}_۰^۲\,\text{ع}$ اور $\text{ھ}^۲$۔ ان سے ا اور غ کو مختلف عددی قیمتیں دیکر اسی وزن اور رتبہ کے نیم غیر متغیر تعداد میں لاانتہا معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

۳ — کبعی کے لئے وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جبکا رتبہ چار اور وزن چھ ہو۔ فرض کرو

$$\text{فہ} = \text{ا}\,\text{ا}_0^2\text{ا}_3^2 + \text{ب}\,\text{ا}_0\text{ا}_2^3 + \text{ج}\,\text{ا}_3\text{ا}_1^3 + \text{د}\,\text{ا}_1^2\text{ا}_2^2 + \text{غ}\,\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3$$

تو

$$\text{عف فہ} = (6\text{ا} + \text{غ})\text{ا}_0^2\text{ا}_2\text{ا}_3 + (6\text{ب} + 3\text{غ} + 2\text{د})\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_2^2$$

$$+ (3\text{ج} + 4\text{د})\text{ا}_1^3\text{ا}_2 + (3\text{ج} + 2\text{غ})\text{ا}_0\text{ا}_1^2\text{ا}_3 \equiv 0$$

اب فرض کرو کہ $\text{ا} = 1$ تو $\text{غ} = -6$، $\text{ج} = 4$، $\text{د} = -3$، اور $\text{ب} = 4$

پس

$$\text{فہ} = \text{ا}_0^2\text{ا}_3^2 + 4\text{ا}_0\text{ا}_2^3 + 4\text{ا}_3\text{ا}_1^3 - 3\text{ا}_1^2\text{ا}_2^2 - 6\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3$$

دفعہ ۲۴ کے ساتھ مقابلہ کرو جہاں فہ کی قیمت اصلوں کی رقوم میں دگئی ہے

۴ — پانچ درجی کا وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جبکا رتبہ تین اور وزن پانچ ہے۔ یہ آسانی کے ساتھ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ مطلوبہ رتبہ اور وزن کی ارقام صرف یہ ہیں $\text{ا}_0^2\text{ا}_5$، $\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_4$، $\text{ا}_0\text{ا}_2\text{ا}_3$، اور $\text{ا}_1\text{ا}_2^2$، $\text{ا}_1^2\text{ا}_3$ حسب سابق عمل کرنے سے مفروضہ سروں کی نسبتیں متعین ہو جاتی ہیں اور نیم غیر متغیر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}_0^2\text{ا}_5 - 5\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_4 + 2\text{ا}_0\text{ا}_2\text{ا}_3 - 6\text{ا}_1\text{ا}_2^2 + 8\text{ا}_1^2\text{ا}_3$$

۵ — چار درجی کا وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ تین اور وزن چھ ہے۔

جواب:- $\text{ا}_0\text{ا}_2\text{ا}_4 + 2\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3 - \text{ا}_0\text{ا}_3^2 - \text{ا}_1^2\text{ا}_4 - \text{ا}_2^3 \equiv \text{جے}$

۶ — عام مساوات کیلئے وہ نیم غیر متغیر تلاش کرو جنکا رتبہ تین اور وزن چھ ہے

یہ آسانی کے ساتھ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ ایسے نیم غیر متغیروں میں جو ارقام داخل ہو سکتی ہیں وہ علاوہ ان رقموں کے جو پچھلی مثال میں واقع ہوئی ہیں $\text{ا}_0^2\text{ا}_6$ اور $\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_5$ ہیں۔ اس طرح تفاعل فہ میں صرف سات ارقام مفروضہ سروں کے ساتھ شامل ہوتی ہیں۔ اب عامل عف کو استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

مفروضہ سروں کے درمیان صرف پانچ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اسلئے ہمیں اس شکل

$$له\ ا_۰ (ا_۰ ا_۶ - ۶ ا_۱ ا_۵ + ۱۵ ا_۲ ا_۴ - ۱۰ ا_۳^۲) + مه\ جے$$

کے نیم غیر متغیر حاصل ہوتے ہیں جس میں له اور مه غیر معین رہ جاتے ہیں۔

پس $ا_۰ (ا_۰ ا_۶ - ۶ ا_۱ ا_۵ + ۱۵ ا_۲ ا_۴ - ۱۰ ا_۳^۲)$ اور جے مطلوبہ نمونہ کے دو بنیادی نیم غیر متغیر ہیں۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ $ا_۰ ا_۶ - ۶ ا_۱ ا_۵ + ۱۵ ا_۲ ا_۴ - ۱۰ ا_۳^۲$ چھہ درجی کا ایک غیر متغیر ہے۔ یہ تفاعل بالراست فوراً معلوم ہوسکتا ہے اگر وہ نیم غیر متغیر معلوم کئے جائیں جنکا رتبہ دو اور وزن چھہ ہے۔ غیر متغیر چونکہ نیم غیر متغیروں کی طرح اصلوں کے متشاکل تفاعل ہوتے ہیں جنمیں صرف اصلوں کے فرق شامل ہوتے ہیں اسلئے وہ موجودہ طریقہ سے حاصل کئے جاتے ہیں اور اس طریقہ سے معلوم کیا ہوا سروں کا کوئی تفاعل جو ایک مخصوص رتبہ کے کثیر رقمی کے لئے غیر متغیر ہو تمام اعلیٰ رتبوں کے کثیر رقمیوں (ثنائی سروں کے ساتھ لکھے ہوئے) کیلئے نیم غیر متغیر ہوگا مثال ۲ میں حاصل کردہ تفاعل کعبی کا ایک غیر متغیر ہے اور جے چار درجی کا ایک غیر متغیر ہے لیکن یہ اچھی طرح ذہن نشین رہے کہ بہت سے نیم غیر متغیر مثلاً وہ جو امثلہ ۱ اور ۴ میں حاصل ہوئے ہیں کسی درجہ کے کثیر رقمی کے لئے غیر متغیر نہیں ہوتے جیساکہ آئندہ باب میں غیر متغیر کی تعریف اور اسکے خواص سے واضح ہوجائیگا۔

۷ — چار درجی کے لئے وہ غیر متغیر معلوم کرو جنکا رتبہ چار اور وزن چھہ ہے

فہ میں علاوہ اُن رقموں کے جو مثال ۳ میں واقع ہوئی ہیں ارقام $ا_۰^۲ ا_۲ ا_۴$ اور $ا_۰ ا_۴ ا_۱^۲$ ہیں۔ پس مثال ۳ میں فہ کی جو قیمت ہے اسمیں $له\ ا_۰^۲ ا_۲ ا_۴ + مه\ ا_۰ ا_۴ ا_۱^۲$ کا اضافہ کرو اور عامل عف کا استعمال کرو تو باقی سروں کو له اور ا کی رقوم میں بیان کردینے کے بعد فہ کی حسب ذیل قیمت حاصل ہوگی:۔

$$\text{ف} = \text{ل}\,(\text{ا}_0^2\,\text{ا}_2\,\text{ا}_4 - \text{ا}_0\,\text{ا}_4\,\text{ا}_1^2 + 3\,\text{ا}_0\,\text{ا}_2^2 + 4\,\text{ا}_3\,\text{ا}_1^3 - 3\,\text{ا}_1^2\,\text{ا}_2^2 - 4\,\text{ا}_0\,\text{ا}_1\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3) + \text{ا}^2\,\Delta_3$$

جہاں Δ_3 وہ تفاعل ہے جو مثال ۳ میں حاصل کیا گیا تھا یعنے کعبی کا ممیز۔

اب چونکہ ل کے ساتھ کا جزوضربی، ھ اور ع کا حاصل ضرب ہے اور Δ_3 کی قیمت ھ ع ـ ا. ج ہے (دفعہ ۴۲) اسلئے

$$\text{ف} = \text{لَ}\ \text{ھ}\ \text{ع} + \text{مَ}\ \text{ا}_0\ \text{ج}$$

پس چار درجی کیلئے مطلوبہ رتبہ اور وزن کے دو بنیادی نیم غیر متغیر ھ ع اور ا. ج ہیں۔

۸ ـ چھٹے اور اعلیٰ رتبوں کے کثیر رقمیوں کے لئے وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جنکا رتبہ چار اور وزن چھ ہے۔

یہ معلوم ہوگا کہ اس صورت میں معروضہ سروں کی نسبتوں کو متعین کرنیکے لئے جتنی مساواتوں کی ضرورت ہے ان سے دو مساواتیں کم ملتی ہیں اور اسلئے تین بنیادی نیم غیر متغیر حاصل ہوتے ہیں۔ یہ آسانی کے ساتھ بتایا جاسکتا ہے کہ مطلوبہ نمونہ کے تمام نیم غیر متغیروں کو شکل

$$\text{ف} = \text{ل}\,\text{ا}_0^2\,(\text{ا}_0\,\text{ا}_6 - 6\,\text{ا}_1\,\text{ا}_5 + 15\,\text{ا}_2\,\text{ا}_4 - 10\,\text{ا}_3^2) + \text{مہ}\ \text{ھ}\ \text{ع} + \text{نہ}\ \text{ا}_0\ \text{ج}$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۹ ـ ثابت کرو کہ مساوات

$$(\text{ا}_0,\ \text{ا}_1,\ \ldots,\ \text{ا}_\text{ر})\,(\text{لا},\ 1)^\text{ر} = 0$$

کا کوئی نیم غیر متغیر مساوات

$$(\text{ا}_0,\ \text{ا}_1,\ \ldots,\ \text{ا}_\text{ن})\,(\text{لا},\ 1)^\text{ن} = 0$$

کا بھی نیم غیر متغیر ہے جہاں ن $>$ ر۔

۱۰ ـ چھ درجی کا وہ نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ تین اور وزن آٹھ ہے۔

جواب:ـ $\text{ا}_0\,\text{ا}_2\,\text{ا}_6 - \text{ا}_0\,\text{ا}_3\,\text{ا}_5 + 2\,\text{ا}_0\,\text{ا}_4^2 - \text{ا}_1^2\,\text{ا}_6 + 3\,\text{ا}_1\,\text{ا}_2\,\text{ا}_5 - \text{ا}_1\,\text{ا}_3\,\text{ا}_4 - 3\,\text{ا}_2^2\,\text{ا}_4 + 2\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3^2$

پروفیسر کیلی (Cayley) نے سب سے پہلے اس اہم مسئلہ کو بیان کیا جو پچھلے دفعہ کا موضوع ہے یعنے رتبہ (ہ) اور وزن (کہ) کے خطی طور پر غیر تابع نیم غیر متغیروں کی تعداد ر - ف ہے جہاں سروں ا، ا،.... ا ن سے جتنی ارقام اس رتبہ اور وزن کی بن سکتی ہیں اِن کی تعداد ر ہے اور انہی سروں سے اُسی رتبہ مگر وزن (کہ - ۱) کی جتنی ارقام بن سکتی ہیں اُن کی تعداد ف ہے - مندرجۂ بالا بحث میں یہ مان لیا گیا ہے کہ ل، ل، ..... ل ف خطی طور پر غیر تابع ہیں اور یہ بات یاد رکھنی چاہئے کہ اگر کوئی خطی روابط اِنکے درمیان ہوں تو ہر ایسے ربط کے جواب میں عدد ف بقدر ایک کے گھٹ جائیگا - خود پروفیسر کیلی نے اِن مقداروں کے بالعموم غیر تابع ہونیکا کوئی ثبوت نہیں دیا ہے لیکن سلوسٹر نے (Crelle, جلد ۸۵ صفحہ ۸۹) اور پروفیسر ایلیٹ نے (Algebra of Quantics دفعہ ۱۲۸) ثبوت فراہم کئے ہیں - نیز اس کتاب کے ختم پر دیکھو نوٹ (ف) -

مثالیں (106)

۱ - بالراست ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\ \text{فا}(ع_0، ع_1، ع_2، \ldots، ع_ن) = \text{عف فا}(ع_0، ع_1، ع_2، \ldots، ع_ن)$$

مساواتوں

$$\text{عف}\, ع_ر = ر\, ع_{ر-1} = \frac{\text{جف}\, ع_ر}{\text{جف لا}}،\quad \text{عف}\{ع_ق \times ع_ق \ldots\} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\{ع_ق \times ع_ق \ldots\}$$

سے یہ فوراً ثابت کیا جا سکتا ہے -

۲ - میکلارن کے مسئلہ سے فا (ع، ع، ع،... ع ن) کو پھیلاؤ اور اسکی مدد سے ثابت کرو کہ

$$\text{فا}(ع_0، ع_1، ع_2، \ldots، ع_ن) = \text{فا} + \text{لا عف فا} + \frac{\text{لا}^2}{2 \times 1}\,\text{عف}^2\,\text{فا} + \ldots$$

جہاں $\text{فا} \equiv \text{فا}(\text{ا}_0 ، \text{ا}_1 ، \text{ا}_2 ، \ldots ، \text{ا}_{\text{ن}})$

۳ — مساواتوں

$$\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2 + \ldots + \text{فہ}_{\text{ف}} = \text{ت}_0 ،$$

$$\text{فہ}_1 \text{طہ}_1 + \text{فہ}_2 \text{طہ}_2 + \ldots + \text{فہ}_{\text{ف}} \text{طہ}_{\text{ف}} = \text{ت}_1 ،$$

$$\text{فہ}_1 \text{طہ}_1^2 + \text{فہ}_2 \text{طہ}_2^2 + \ldots + \text{فہ}_{\text{ف}} \text{طہ}_{\text{ف}}^2 = \text{ت}_2 ،$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{فہ}_1 \text{طہ}_1^{\text{ف}-1} + \text{فہ}_2 \text{طہ}_2^{\text{ف}-1} + \ldots + \text{فہ}_{\text{ف}} \text{طہ}_{\text{ف}}^{\text{ف}-1} = \text{ت}_{\text{ف}-1} ،$$

سے $\text{فہ}_1 ، \text{فہ}_2 ، \ldots ، \text{فہ}_{\text{ر}} ، \ldots ، \text{فہ}_{\text{ف}}$ معلوم کرو۔

یہ توسیع ہے مثال ۱ صفحہ (۶۰) کی جسکو حل کیا جا چکا ہے۔ وہاں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اسکو استعمال کرنے سے یہ فوراً معلوم ہو جائیگا کہ مساوات

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{طہ}_{\text{ر}} & \text{طہ}_{\text{ر}}^2 & \ldots & \text{طہ}_{\text{ر}}^{\text{ف}-1} & \text{فہ}_{\text{ر}} \\ \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 & \ldots & \text{س}_{\text{ف}-1} & \text{ت}_0 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \ldots & \text{س}_{\text{ف}} & \text{ت}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{س}_{\text{ف}-1} & \text{س}_{\text{ف}} & \text{س}_{\text{ف}+1} & \ldots & \text{س}_{2\text{ف}-2} & \text{ت}_{\text{ف}-1} \end{vmatrix} = 0$$

سے $\text{فہ}_{\text{ر}}$، $\text{طہ}_{\text{ر}}$ کے (ف - ۱) ویں درجہ کے تفاعل کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔ مساوات بالا میں

$$\text{س}_{\text{ک}} = \text{طہ}_1^{\text{ک}} + \text{طہ}_2^{\text{ک}} + \text{طہ}_3^{\text{ک}} + \ldots + \text{طہ}_{\text{ف}}^{\text{ک}}$$

۴ — ثابت کرو کہ

Π ≡ ا$_۰^۶$ (بہ − جہ)^۲ (جہ − عہ)^۲ (عہ − بہ)^۲ (بہ − ضہ)^۲ (جہ − ضہ)^۲

= ل ع^۳ + م جے^۲

جہاں م = − ۲۷ ل ۔

ہم دفعہ ۱۶۳ کے مسئلہ سے استفادہ کرتے ہیں اور اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کو جسکا رتبہ ۶ اور وزن ۱۲ ہے ا۰، ھ، ع، جے کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ۔ جدول (107)

	رتبہ	وزن
ھ	۲	۲
ع	۲	۴
جے	۳	۶

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کی قیمت میں ھ داخل نہیں ہو سکتا کیونکہ چھٹے رتبہ کی وہ ارقام جنمیں ھ داخل ہوتا ہے ھ^۳، ھ^۲ ع، ھ ع^۲ ہیں اور یہ ارقام مطلوبہ وزن کی نہیں ہیں ۔ پس Π کی شکل ل ع^۳ + م جے^۲ ہونی چاہیئے جہاں ل اور م عددی سر ہیں ۔

اب ا$_۲$ اور ا$_۴$ کو صفر کے مساوی رکھو تو Π معدوم ہو جائیگا کیونکہ اس صورت میں چار درجی میں مساوی اصلیں ہونگی ۔ پس ع اور جے کی تحویل شدہ قیمتوں کو استعمال کرنے سے

۰ = ل (۲ ا$_۲^۲$)^۳ + م (− ا$_۲^۳$)^۲ اور اسلئے م = − ۲۷ ل

متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں حاصل کرنے میں یہ طریقہ استعمال کرتے وقت ہر صورت میں حسب ذیل قاعدہ کی پابندی کرنی چاہیئے :- وزن کہ کی وہ رقمیں باقی رکھو جنکا وزن ہ سے بڑا نہ ہو اور ا۰ کی مناسب قوتوں سے ان رقموں کو ضرب دیکر پورے جملہ کو متجانس بناؤ ۔

۵ـ چار درجی کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

Σ (ب – ج)^{2} (ج – ع)^{2} (ع – ب)^{2}

کو محسوب کرو۔

چونکہ اس متشاکل تفاعل کا رتبہ چار اور وزن چھ ہے اسلئے ہم فرض کرسکتے ہیں

ا$_{0}^{4}$ Σ (ب – ج)^{2} (ج – ع)^{2} (ع – ب)^{2} = ل ھ^{3} + م ا$_{0}$ جے^{2} (۱)

پچھلی مثال کی طرح ا$_{1}$ = ۰، ا$_{3}$ = ۰ رکھنے سے اور تحویل شدہ متشاکل تفاعل (جبکہ ج = ۰، ضہ = ۰) کی قیمت کو دو درجی مساوات

ا$_{0}$ لا^{2} + ۴ ا$_{1}$ لا + ۶ ا$_{2}$ = ۰

کے سروں کی رقوم میں محسوب کرنے سے ل اور م کی قیمتیں معلوم ہوسکتی ہیں کیونکہ تحویل شدہ متشاکل تفاعل کی اس قیمت کو ل ھ^{3} + م ا$_{0}$ جے^{2} کی تحویل شدہ قیمت کے مساوی رکھنے سے دو مفرد مساواتیں ملتی ہیں جنسے ل اور م کی تعیین ہوسکتی ہے۔ یا ہم اس طرح عمل کرسکتے ہیں:-

دو چار درجی مساواتیں لو جنکی اصلیں معلوم ہوں اور ہر صورت میں اصلوں کو عملاً درج کرکے متشاکل تفاعل کی قیمت کو محسوب کرو اور پھر مساوات کی دونوں طرفوں کا مقابلہ کرو جبکہ ھ، ع، جے کی جگہ ان کی وہ قیمتیں ہوں جو عددی سروں سے محسوب کی گئی ہیں۔

پہلے ہم چار درجی مساوات ۶ لا^{4} – ۶ لا^{2} = ۰ لیتے ہیں جسکی اصلیں ہیں ۰، ۰، ۱، –۱۔ پس

Σ = ۸، ھ = –۶، ع = ۳، جے = ۱

مساوات (۱) میں درج کرنے سے

۱۷۲۸ = –۳ ل + م

اسی طرح چار درجی مساوات لا^{4} – ۶ لا^{2} + ۵ = ۰ پر عمل کرنے سے جسکی اصلیں ± $\sqrt{۵}$، ± ۱ ہیں ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

Σ = ۷۶۸، ھ = –۱، ع = ۸، جے = –۴

پس ـ ۱۹۲ = ۲ ل + م

اور اسلئے ل = ـ ۲ × ۱۹۲ ، م = ۳ × ۱۹۲

اور بالاخر ا۰^۲ Σ = ۱۹۲ (ـ ۲ ھ ع + ۳ ا۰ جے)

۶ـ اگر مساوات

ا۰ لا^۴ + ۴ ا۱ لا^۳ + ۶ ا۲ لا^۲ + ۴ ا۳ لا + ا۴ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو ا۰، ھ، ع، جے کی رقوم میں متشاکل تفاعل

ا۰^۶ Σ (۳ عہ ـ بہ ـ جہ ـ ضہ)^۲ (۳ بہ ـ جہ ـ ضہ ـ عہ)^۲ (۳ جہ ـ ضہ ـ عہ ـ بہ)^۲

کی قیمت محسوب کرو۔

اسکو پچھلی دو مثالوں کے طریقہ سے حل کیا جا سکتا ہے یا ہم اس طرح عمل کر سکتے ہیں:ـ

ا۰^۶ Σ = ۴^۶ Σ ی۱^۲ ی۲^۲ ی۳^۲

جہاں ی۱، ی۲، ی۳، مساوات

ی^۳ + ۶ ھ ی^۲ + ۴ گ ی + ا۰^۲ ع ـ ۳ ھ^۲ = ۰ (دفعہ ۲۷)

کی اصلیں ہیں۔ پس مثال ۲ دفعہ ۱۶۱ کی رو سے

ا۰^۶ Σ = ۴^۶ {ـ ۷ ھ^۳ + ا۰^۲ ھ ع ـ ۴ ا۰^۲ جے^۳}

۷ـ اگر مساوات (ا۰، ا۱، ا۲، ... ان) (لا، ۱)^ن = ۰ کا ایک نیم غیر متغیر فا(ا۰، ا۱، ا۲، ... ، ان) ہو تو ثابت کرو کہ اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کا وہی تفاعل یعنے فا(س۰، س۱، س۲، ... ، سن) بھی ایک نیم غیر متغیر ہے۔ (مسٹر ایم ـ رابرٹس)۔

پہلے تفاعل پر عف کا اور دوسرے پر ـ مف کا عمل کرو تو چونکہ

عف ار = ر ار‐۱ اور مف سر = ر سر‐۱

اسلئے مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔ کیونکہ ہمیں شکل میں تماثل نتیجے ملتے ہیں اور اِن میں سے اگر ایک متماثلاً معدوم ہو تو دوسرے کو بھی معدوم ہونا چاہئے۔

۸۔ مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \text{س}_0 & \text{س}_1 & \text{س}_2 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ \text{س}_2 & \text{س}_3 & \text{س}_4 \end{vmatrix}$$

کو چار درجی کے سروں کی رقوم میں محسوب کرو۔

پچھلی مثال کی رو سے یہ مقطع اصلوں کے فرقوں کا ایک تفاعل ہے اسلئے اسکو محسوب کرنے سے پیشتر ہم چار درجی سے اسکی دوسری رقم جدا کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$\text{ا}^4 + \text{پ}_2\,\text{ا}^2 + \text{پ}_3\,\text{ا} + \text{پ}_4 = 0$$

تو

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2\text{پ}_2 \\ 0 & -2\text{پ}_2 & -3\text{پ}_3 \\ -2\text{پ}_2 & -3\text{پ}_3 & 2\text{پ}_2^2 - 4\text{پ}_4 \end{vmatrix} = 4\left\{8\text{پ}_2\text{پ}_4 - 2\text{پ}_2^3 - 9\text{پ}_3^2\right\}$$

109 لیکن $\text{ا}_0^2\text{پ}_2 = 6\text{ھ}$، $\text{ا}_0^3\text{پ}_3 = 4\text{گ}$، $\text{ا}_0^4\text{پ}_4 = \text{ا}_0^2\text{ع} - 3\text{ھ}^2$

اسلئے پ_2، پ_3، پ_4 کی بجائے یہ قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ا}_0^4\,\Delta = 192\left(-2\,\text{ھ}\,\text{ع} + 3\,\text{ا}_0\,\text{ج}\right)$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو مثال ۵ میں حاصل ہوا (دیکھو مثال ۷، صفحہ ۵۶)

۹۔ اگر مساوات

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^4 + 4\,\text{ا}_1\,\text{لا}^3 + 6\,\text{ا}_2\,\text{لا}^2 + 4\,\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ا}_4 = 0$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو مساوات

$$\text{س}_{\text{.}}\text{لا}^{4} + 4\,\text{س}_{1}\text{لا}^{3} + 6\,\text{س}_{2}\text{لا}^{2} + 4\,\text{س}_{3}\text{لا} + \text{س}_{4} = \Sigma(\text{لا}+\text{عہ})^{4} = 0$$

کے ھس، عس، جس، گس کو ھ، ع، ج، گ کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب:- $\frac{\text{ھ}_{\text{س}}}{\text{س}_{\text{.}}^{2}} = -3\frac{\text{ھ}}{\text{ا}_{\text{.}}^{2}}$ ، $\frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{س}_{\text{.}}^{2}} = \frac{48\,\text{ھ}^{2} - \text{ا}_{\text{.}}\text{ع}}{\text{ا}_{\text{.}}^{4}}$ ،

$\frac{\text{گ}_{\text{س}}}{\text{س}_{\text{.}}^{3}} = -3\frac{\text{گ}}{\text{ا}_{\text{.}}^{3}}$ اور روابط $\text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3} \equiv \text{ا}_{\text{.}}^{2}(\text{ھ ع} - \text{ا}_{\text{.}}\text{ج})$ ،

$\text{گ}_{\text{س}}^{2} + 4\,\text{ھ}_{\text{س}}^{3} \equiv \text{س}_{\text{.}}^{2}(\text{ھ}_{\text{س}}\text{ع}_{\text{س}} - \text{س}_{\text{.}}\text{ج}_{\text{س}})$ کی مدد سے

$$\text{ج}_{\text{س}} = \frac{192}{\text{ا}_{\text{.}}^{4}}(3\,\text{ا}_{\text{.}}\text{ج} - 2\,\text{ھ ع})$$

۱۰۔ اگر ف جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\Sigma(\text{عہ}_{1}-\text{عہ}_{2})^{\text{ف}} = \text{س}_{\text{.}}\text{س}_{\text{ف}} - \text{ف}\,\text{س}_{1}\text{س}_{\text{ف}-1} + \tfrac{1}{2}\text{ف}(\text{ف}-1)\text{س}_{2}\text{س}_{\text{ف}-2} - \dots$$

چونکہ

$$\Sigma(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{ف}} = \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ف}} - \text{ف}\,\text{س}_{1}\text{لا}^{\text{ف}-1} + \frac{\text{ف}(\text{ف}-1)}{2}\text{س}_{2}\text{لا}^{\text{ف}-2} \dots \text{ف}\,\text{س}_{\text{ف}-1}\text{لا} + \text{س}_{\text{ف}}$$

اسلئے لا کو متواتر عہ۱، عہ۲، عہ۳، .... عہن میں بدلنے اور اس طرح حاصل شدہ مساواتوں کی دونوں طرفوں کو جمع کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$2\,\Sigma(\text{عہ}_{1}-\text{عہ}_{2})^{\text{ف}} = \text{س}_{\text{.}}\text{س}_{\text{ف}} - \text{ف}\,\text{س}_{1}\text{س}_{\text{ف}-1} + \frac{\text{ف}(\text{ف}-1)}{2\times1}\text{س}_{2}\text{س}_{\text{ف}-2} - \dots$$

$$\dots - \text{ف}\,\text{س}_{1}\text{س}_{\text{ف}-1} + \text{س}_{\text{.}}\text{س}_{\text{ف}}$$

جہاں اس مساوات کی بائیں طرف کی سب رقمیں سوائے درمیانی رقم کے تکرار پائی ہیں۔ پس

$$\Sigma(\text{عہ}_1-\text{عہ}_2)^4=\text{س}_0\text{س}_4-4\text{س}_1\text{س}_3+3\text{س}_2^2\text{،}$$

$$\Sigma(\text{عہ}_1-\text{عہ}_2)^6=\text{س}_0\text{س}_6-6\text{س}_1\text{س}_5+15\text{س}_2\text{س}_4-10\text{س}_3^2\text{، وغیرہ}$$

۱۱۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں فَہ(عہ)، فَہ(بہ)، فَہ(جہ)، فَہ(ضہ) ہوں جہاں مساوات

$$\text{ا}_0\text{فہ}(\text{لا})\equiv\text{ا}_0\text{لا}^4+4\text{ا}_1\text{لا}^3+6\text{ا}_2\text{لا}^2+4\text{ا}_3\text{لا}+\text{ا}_4=0$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں۔

جواب:- $\text{فہ}^4+\dfrac{32\text{گ}}{\text{ا}_0^3}\text{فہ}^2+\dfrac{192(2\text{ھ ع}-3\text{ا}_0\text{ج})}{\text{ا}_0^4}\text{فہ}$

$$+\frac{256(\text{ع}^3-27\text{ج}^2)}{\text{ا}_0^6}=0$$

110) ۱۲۔ اگر $\Sigma(\text{عہ}-\text{بہ})^2(\text{بہ}-\text{جہ})^2(\text{جہ}-\text{عہ})^2(\text{لا}-\text{ضہ})^4$ کو پھیلانے سے

$$\text{ک}_0\text{لا}^4+4\text{ک}_1\text{لا}^3+6\text{ک}_2\text{لا}^2+4\text{ک}_3\text{لا}+\text{ک}_4$$

حاصل ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ک}_0\,\text{عہ بہ جہ}+\text{ک}_1(\text{بہ جہ}+\text{جہ عہ}+\text{عہ بہ})+\text{ک}_2(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})+\text{ک}_3}{(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{عہ}-\text{بہ})}=\frac{\pm16\sqrt{\Delta}}{\text{ا}_0^2}$$

جہاں $\Delta=\text{ع}^3-27\text{ج}^2$

۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ا}_0^4\,\Sigma(\text{بہ}+\text{جہ}-\text{عہ}-\text{ضہ})^2(\text{بہ}-\text{جہ})^2(\text{عہ}-\text{ضہ})^2=192(3\text{ا}_0\text{ج}-2\text{ھ ع})$$

۱۴ـ ثابت کرو کہ

اَ^٦ Σ (به + جه ـ عه ـ ضه)^٤ (به ـ جه)^٢ (عه ـ ضه)^٢

= ۵۱۲ (اَ^٢ ع^٢ ـ ۳۶ اَ ھ ج + ۱۲ ھ^٢ ع)

۱۵ـ اگر ایک سادہ متبادلہ (یعنے وہ جسمیں ہر عنصر کی قوت ایک ہو) کو فرقوں کے حاصل ضرب (دیکھو مثال ۱۳ صفحہ ۹۴) سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت کو ایک مقطع کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے جسکے عناصر اسمیں داخل ہونیوالی مقداروں کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں۔ ہم تیسرے رتبہ کا ایک مقطع لیتے ہیں اور ثابت کرتے ہیں

عه^ف	عه^ق	عه^ر
به^ف	به^ق	به^ر
جه^ف	جه^ق	جه^ر

≡

Π_ف	Π_ق	Π_ر
Π_{ف-١}	Π_{ق-١}	Π_{ر-١}
Π_{ف-٢}	Π_{ق-٢}	Π_{ر-٢}

١	عه	عه^٢
١	به	به^٢
١	جه	جه^٢

جہاں Π_ف، Π_ق، وغیرہ اصلوں عه، به، جه کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں جیسا کہ دفعہ ۸۳ جلد اول میں تعریف کیگئی تھی۔ طریقہ ذیل بالکل عام ہے۔ حسب ذیل متماثلہ کو جو آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتی ہے:۔

لا / (لا ـ عه)	ما / (ما ـ عه)	ی / (ی ـ عه)
لا / (لا ـ به)	ما / (ما ـ به)	ی / (ی ـ به)
لا / (لا ـ جه)	ما / (ما ـ جه)	ی / (ی ـ جه)

لا^۳ ما^۳ ی^۳		۱ عہ عہ^۲
لا^۲ ما^۲ ی^۲		۱ بہ بہ^۲
لا ما ی		۱ جہ جہ^۲

≡ ـــ

(لا - عہ)(لا - بہ)(لا - جہ)(ما - عہ)(ما - بہ)(ما - جہ)(ی - عہ)(ی - بہ)(ی - جہ)

بائیں طرف کے پہلے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (لا - عہ) (لا - بہ) (لا - جہ) مقسوم علیہ کے طور پر لکھو، دوسرے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (ما - عہ) × (ما - بہ) (ما - جہ)، اور تیسرے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (ی - عہ) × (ی - بہ) (ی - جہ) - پھر حسب ذیل نمونے کی مساواتوں سے (مثال ۱ دفعہ ۸۳) اندراج کرو :-

لا / (لا - عہ) = ۱ + عہ لاَ + عہ^۲ لاَ^۲ + ... + عہ^ف لاَ^ف + ... ،

لا^۳ / ((لا - عہ)(لا - بہ)(لا - جہ)) = ۱ + π۱ لاَ + π۲ لاَ^۲ + ... + πف لاَ^ف + ... ،

جہاں　لاَ = ۱/لا ، ماَ = ۱/ما ، یَ = ۱/ی ،

تب مندرجۂ بالا متماثلہ ہو جاتی ہے

| ۱ + عہ لاَ + ... + عہ^ف لاَ^ف + .. ، ... ، ... |
| ۱ + بہ لاَ + ... + بہ^ف لاَ^ف + .. ، ... ، ... |
| ۱ + جہ لاَ + ... + جہ^ف لاَ^ف + .. ، ... ، ... |

۱ + π۱ لاَ + π۲ لاَ^۲ + ... + πف لاَ^ف + .. ، ... ، ...		۱ عہ عہ^۲
لاَ + π۱ لاَ^۲ + ... + πف-۱ لاَ^ف + .. ، ... ، ...	≡	۱ بہ بہ^۲
لاَ^۲ + ... + πف-۲ لاَ^ف + .. ، ... ، ...		۱ جہ جہ^۲

جہاں اِن مقطعوں کے دوسرے اور تیسرے ستون لَا کی بجائے مَا اور یَ رکھنے سے مہیا کئے جا سکتے ہیں۔ طرفین میں $\text{لَ}^{\text{ف}}\ \text{مَ}^{\text{ق}}\ \text{یَ}^{\text{ر}}$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جب فرقوں کے حاصل ضرب کا مقطع اوپر کی شکل میں (یعنے ستونوں کی ترتیب میں صعودی قوتوں کے ساتھ) لکھا جاتا ہے تو حاصل ضرب کی علامت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے کیونکہ اُن دو مقطعوں کے حاصل ضرب میں جنہیں رقم $\Pi_{\text{ف}}\ \Pi_{\text{ق}-1}\ \Pi_{\text{ر}-2}$ بہ جہ² شامل ہے رقم $\text{عہ}^{\text{ف}}\ \text{بہ}^{\text{ق}}\ \text{جہ}^{\text{ر}}$ بھی شامل ہونی چاہئے۔ نیز مخصوص مثالوں میں اس طریقہ کو استعمال کرنے میں یہ ذہن نشین رہے کہ $\Pi_0 = 1$، اور $\Pi_{\text{ژ}} = 0$ جبکہ ژ منفی ہو۔

۱۶ — مثال ماسبق کی رو سے ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{عہ}^2 & \text{عہ}^5 \\ 1 & \text{بہ}^2 & \text{بہ}^5 \\ 1 & \text{جہ}^2 & \text{جہ}^5 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \Pi_0 & \Pi_2 & \Pi_5 \\ 0 & \Pi_1 & \Pi_4 \\ 0 & \Pi_0 & \Pi_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \text{عہ} & \text{عہ}^2 \\ 1 & \text{بہ} & \text{بہ}^2 \\ 1 & \text{جہ} & \text{جہ}^2 \end{vmatrix}$$

اسلئے اگر دئے ہوئے مقطع کو فرقوں کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت $\Pi_1 \Pi_3 - \Pi_4$ ہے جسکو $\Sigma\, \text{عہ}^3\, \text{بہ} + \Sigma\, \text{عہ}^2\, \text{بہ}^2 + 2\,\Sigma\, \text{عہ}^2\, \text{بہ}\, \text{جہ}$ کے مساوی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۱۷ — مثال ۱۵ کے طریقہ سے ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{عہ}_1 & \text{عہ}_1^2 & \cdots & \text{عہ}_1^{\text{ن}-2} & \text{عہ}_1^{\text{م}} \\ 1 & \text{عہ}_2 & \text{عہ}_2^2 & \cdots & \text{عہ}_2^{\text{ن}-2} & \text{عہ}_2^{\text{م}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \text{عہ}_{\text{ن}} & \text{عہ}_{\text{ن}}^2 & \cdots & \text{عہ}_{\text{ن}}^{\text{ن}-2} & \text{عہ}_{\text{ن}}^{\text{م}} \end{vmatrix} \equiv \Pi_{\text{م}-\text{ن}+1} \begin{vmatrix} 1 & \text{عہ}_1 & \text{عہ}_1^2 & \cdots & \text{عہ}_1^{\text{ن}-1} \\ 1 & \text{عہ}_2 & \text{عہ}_2^2 & \cdots & \text{عہ}_2^{\text{ن}-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \text{عہ}_{\text{ن}} & \text{عہ}_{\text{ن}}^2 & \cdots & \text{عہ}_{\text{ن}}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix}$$

جہاں م = یا > ن۔

اِس نتیجہ کو بالراست مثال ۱ دفعہ ۸۳ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

(112)

سولھواں باب

ہم متغیر اور غیر متغیر

١٦٦ — تعریف ۔ اس باب میں اور آئندہ ابواب میں ترقیم

$$(ا_۰، ا_۱، ا_۲، \dots، ا_ن)(لا، ما)^ن$$

کثیر رقمی

$$ا_۰ لا^ن + ن ا_۱ لا^{ن-۱} ما + \frac{ن(ن-۱)}{۲} ا_۲ لا^{ن-۲} ما^۲ + \dots + ن ا_{ن-۱} لا ما^{ن-۱} + ا_ن ما^ن$$

کو تعبیر کرنیکے لئے استعمال کیجائیگی ۔ یہ کثیر رقمی لا اور ما میں متجانس تفاعل ہے اور اسکے سر ثنائی سیر ہیں ۔ اگر ہم ما = ۱ رکھیں تو یہ کثیر رقمی دفعہ ۳۵ کا $ع_ن$ ہو جاتا ہے ۔ یہی ترقیم لا اور ما کے مندرجۂ بالا متجانس تفاعل کو تعبیر کرنیمیں استعمال کیجا سکتی ہے ۔

فرض کرو کہ مساوات $ع_ن \equiv (ا_۰، ا_۱، ا_۲، \dots، ا_ن)(لا، ۱)^ن = ۰$ کی اصلوں $ع_۱، ع_۲، ع_۳، \dots، ع_ن$ کا ایک نیم غیر متغیر ف (پچھلے دفعہ کی تعریف کے بموجب) ہے جسکا رتبہ ھ ہے ۔ تب اگر $ع_۱، ع_۲، \dots ع_ن$ کی بجائے

$$\frac{۱}{ع_۱ - لا}، \frac{۱}{ع_۲ - لا}، \dots، \frac{۱}{ع_ن - لا}$$

علی الترتیب درج کئے جائیں تو نتیجہ کو (عنھ سے ضرب دینے کے بعد تاکہ کسریں دور ہو جائیں) ہم عن کا ہم متغیر کہینگے اگر اس میں لا موجود ہو اور غیر متغیر اگر اس میں لا موجود نہ ہو۔

غیر متغیر کی اس تعریف سے ہم فوراً یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ

ا ف (ع۱، ع۲، ع۳، ...، عن)

عن کا ایک غیر متغیر ہے جبکہ ف ایک ہی نمونہ کی رقموں سے ترکیب پاتا ہے اور ان میں سے ہر رقم میں تمام اصلیں موجود ہوتی ہیں اور اصل کا درجہ وہی ھ ہوتا ہے۔

ان تعریفوں کا اطلاق اس صورت پر بھی ہو سکتا ہے جبکہ ف میں (118)
(جو فرقوں کا تفاعل ہے) متعدد مساواتوں عن = ۰، عق = ۰، عر = ۰ وغیرہ کی اصلیں علی الترتیب رتبوں ھ، ھَ، ھً وغیرہ میں متشاکلاً داخل ہوں۔ حسب سابق ہم اصل ع کی بجائے $\frac{1}{ع - لا}$ درج کر سکتے ہیں اور عنھ عقھَ عرھً ... سے ضرب دیکر کسریں دور کر سکتے ہیں۔ اگر نتیجہ میں متغیر لا رہ جائے تو کثیر رقمیوں عن، عق، عر وغیرہ کے نظام کا ایک ہم متغیر حاصل ہوگا اور اگر متغیر لا موجود نہ ہو تو نظام کا ایک غیر متغیر ف ہوگا۔

۱۶۷ ۔ **ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت** ۔ اب ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح پچھلے باب کے استحالات کو آسانی کے ساتھ عمل میں لایا جا سکتا ہے اور کس طرح سروں کی رقوم میں ہم متغیروں اور غیر متغیروں کو محسوب کیا جا سکتا ہے۔ اس مقصد کے لئے فرض کرو کہ نیم غیر متغیر کو سروں کی رقوم میں حسب شکل ذیل بیان کیا گیا ہے:۔

ا ب^ھ فہ (عہ۱، عہ۲، … عہن) = فا (ا ب، ا۱، ا۲، … ان)

اب اصلوں کو اِنکے متکافیوں میں بدلنے سے اور اسلئے ا۱ کو ان میں، ا۲ کو ان-۱ میں، … ار کو ان-ر میں، … بدلنے سے (یعنی لا حقوں کو اِنکی متمم قیمتیں دینے سے) ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا ب^ھ سا (عہ۱، عہ۲، … عہن) = فا (ان، ان-۱، … ا ب)

جہاں سا، اصلوں کا ایک صحیح متشاکل تفاعل ہے اور فا، سروں کی رقوم میں متناظر قیمت ہے۔ اس تفاعل کو ھ متغیر کا (جو اس سے اخذ کیا گیا ہو) ماخذ* کہتے ہیں۔

پھر اصلوں عہ۱، عہ۲، … عہن کی بجائے عہ۱ - لا، عہ۲ - لا، … عہن - لا درج کرو اور اسلئے ار وغیرہ کی بجائے عر وغیرہ (دفعہ ۳۵) تو

ا ب^ھ سا (عہ۱ - لا، عہ۲ - لا، … عہن - لا) = فا (عن، عن-۱، … ع۱، ع ب)

اس طرح ہم فرقوں کے تفاعل سے آسانی کے ساتھ ہم متغیر اخذ کر لیتے ہیں اور ساتھ ہی سروں کی رقوم میں اسکا معادل معلوم کر لیتے ہیں۔ طریق عمل کو واضح کرسکنے کے لئے ہم کعبی کی صورت میں ذیل کی مثال لیتے ہیں:-

ا ب^۲ Σ (عہ - بہ)^۲ = ۱۸ (ا۱^۲ - ا ب ا۲)

(114) اصلوں کو انکے متکافیوں میں اور ا ب، ا۱، ا۲، ا۳ کو ا۳، ا۲، ا۱، ا ب میں بدلنے سے

---

* اس اصطلاح 'ماخذ' (Source) کو ایم - رابرٹس نے جاری کیا۔

ا۲. ∑ عہ۲ (بہ - جہ)۲ = ۱۸ (ا۲۱ - ا۲ ا۰)

پھر عہ، بہ، جہ، کو عہ - لا، بہ - لا، جہ - لا میں اور ا۰، ا۱، ا۲ کو ع۱، ع۲، ع۳ میں بدلنے سے

ا۲. ∑ (بہ - جہ)۲ (لا - عہ)۲ = ۱۸ (ع۲۲ - ع۳ ع۱)

اس مساوات کے دوسرے رکن کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

ع۱ ع۳ - ع۲۲ ≡ (ا. ا۲ - ا۲۱) لا۲ + (ا. ا۳ - ا۱ ا۲) لا + (ا۱ ا۳ - ا۲۲)

اس ہم متغیر کو ع۳ کا "ہیسین" (Hessian) کہتے ہیں۔ ہم اسکو ھ لا سے تعبیر کرینگے کیونکہ اس کا صدر سر (ا. ا۲ - ا۲۱) = ھ ہے۔

دوسری مثال کے طور پر ہم چار درجی کا ذیل کا تفاعل لیتے ہیں:-

ا۲. ∑ (بہ - جہ)۲ (عہ - ضہ)۲ = ۲۴ (ا. ا۴ - ۴ ا۱ ا۳ + ۳ ا۲۲) (۱)

اصلوں کو انکے متکافیوں میں اور ا.، ا۱، ا۲، ا۳، ا۴ کو ا۴، ا۳، ا۲، ا۱، ا. میں بدلنے سے

ا۲. ∑ (جہ - بہ)۲ (ضہ - عہ)۲ = ۲۴ (ا۴ ا. - ۴ ا۳ ا۱ + ۳ ا۲۲)

اس لئے ان تبدیلیوں سے مساوات (۱) میں کوئی فرق نہیں آیا۔ پھر چونکہ اس صورت میں سا (عہ، بہ، جہ، ضہ) اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہے اس لئے سا نہیں بدلتا جبکہ عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے عہ - لا، بہ - لا، وغیرہ درج کئے جاتے ہیں۔ اس لئے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ع۴ کا غیر متغیر ا. ا۴ - ۴ ا۱ ا۳ + ۳ ا۲۲ ہے۔

نیز دفعہ ۱۶۶ میں جو بات بیان کی گئی تھی اس کے بموجب ہم دیکھتے

ہیں کہ چونکہ

$$\text{فہ} \equiv (\text{بہ}-\text{جہ})^2(\text{عہ}-\text{ضہ})^2 + (\text{جہ}-\text{عہ})^2(\text{بہ}-\text{ضہ})^2 + (\text{عہ}-\text{بہ})^2(\text{جہ}-\text{ضہ})^2$$

اسلئے فہ کی تینوں رقموں میں سے ہر رقم میں ہر اصل کا درجہ ھ ہے جو یہاں ۲ کے مساوی ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ چار درجی کا ایک غیر متغیر یہ بھی ہے:-

$$\text{ا}_0^3\left\{(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})-(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})\right\}\left\{(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})-(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})\right\}\times\left\{(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})-(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})\right\}$$

$$=-432\left(\text{ا}_0\text{ا}_2\text{ا}_4+2\,\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3-\text{ا}_0\text{ا}_3^2-\text{ا}_1^2\text{ا}_4-\text{ا}_2^3\right)$$

کسی مخصوص صورت میں یہ معلوم کر لینا کوئی مشکل کام نہیں کہ آیا فہ سے ایک غیر متغیر حاصل ہوگا یا ہم متغیر۔ کیونکہ اگر فہ سے ایک غیر متغیر حاصل ہوتا ہے تو فہ = ± سا یعنے فہ نہیں بدلتا (سوائے علامت میں اور یہ اسوقت جبکہ اسکے نمونہ کی رقم اصلوں کے فرقوں کی ایک طاق تعداد کا حاصل ضرب ہو یعنی جبکہ اسکا وزن طاق ہو) اگر اصلوں کی بجائے انکے متکافی درج کئے جائیں اور سادہ ترین ضارب $(\text{عہ}_1\,\text{عہ}_2\,\ldots\,\text{عہ}_{\text{ن}})^{\text{ھ}}$ سے ضرب دیکر کسریں دور کی جائیں۔ وہ غیر متغیر جسکا وزن طاق ہو معوج غیر متغیر کہلاتا ہے۔ (115)

۱۶۸ - ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے خواص - فہ چونکہ اصلوں کا ایک متجانس تفاعل ہوتا ہے اسلئے اس سے اخذ کردہ ہم متغیر کو شکل

$$\frac{\text{ع}^{\text{ھ}}}{\text{لاکہ}}\,\text{فہ}\left(\frac{\text{لا}}{\text{عہ}_1-\text{لا}},\ \frac{\text{لا}}{\text{عہ}_2-\text{لا}},\ \ldots,\ \frac{\text{لا}}{\text{عہ}_{\text{ن}}-\text{لا}}\right)$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں فہ کا رتبہ ھ اور وزن کہ ہے۔

نیز فہ چونکہ فرقوں کا ایک تفاعل ہوتا ہے اسلئے ہم ہر جزو ترکیبی میں ایک جمع کر سکتے ہیں مثلاً ہم $\frac{لا}{عہ_ر - لا}$ میں ایک جمع کرکے $\frac{عہ_ر}{عہ_ر - لا}$ حاصل کر سکتے ہیں۔ پھر ہر عنصر کو لا سے ضرب دینے سے ہم متغیر ہو جاتا ہے

$$\frac{ع^ھ}{لا^{۲ک}} فہ \left(\frac{عہ_۱ لا}{عہ_۱ - لا}، \frac{عہ_۲ لا}{عہ_۲ - لا}، \ldots، \frac{عہ_ن لا}{عہ_ن - لا}\right)$$

اب لا، $عہ_۱$، $عہ_۲$، ... کے متکافیوں کے لئے ترقیم $\bar{لا}$، $\bar{عہ}_۱$، $\bar{عہ}_۲$، ... استعمال کرو اور فرض کرو کہ $\bar{ع}$ وہ تفاعل ہے جسکی اصلیں $\bar{عہ}_۱$، $\bar{عہ}_۲$، $\bar{عہ}_۳$، ...، $\bar{عہ}_ن$ ہیں یعنی

$$\bar{ع} \equiv ا_ن \bar{لا}^ن + ن\, ا_{ن-۱} \bar{لا}^{ن-۱} + \ldots + ن\, ا_۱ \bar{لا} + ا_۰ = ۰$$

تو چونکہ

$$\frac{۱}{عہ_ر - \bar{لا}} = \frac{-عہ_ر لا}{عہ_ر - لا}$$

اور $ع = ا_ن \bar{لا}^ن (\bar{لا} - \bar{عہ}_۱)(\bar{لا} - \bar{عہ}_۲)\ldots(\bar{لا} - \bar{عہ}_ن) = \bar{لا}^ن \bar{ع}$

اسلئے مندرجۂ بالا ہم متغیر آسانی کے ساتھ اس شکل

$$(-۱)^{ک} لا^{ن ھ - ۲ک} \bar{ع}^ھ فہ \left(\frac{۱}{\bar{عہ}_۱ - \bar{لا}}، \frac{۱}{\bar{عہ}_۲ - \bar{لا}}، \ldots، \frac{۱}{\bar{عہ}_ن - \bar{لا}}\right)$$

میں تحویل ہو جاتا ہے۔ پس یہ ثابت ہو گیا کہ ہم متغیر نہیں بدلتا جبکہ لا، $عہ_۱$، $عہ_۲$، ... $عہ_ن$ کی بجائے ان کے متکافی درج کئے جاتے ہیں اور نتیجہ کو $(-۱)^{ک} لا^{ن ھ - ۲ک}$ (116)

سے ضرب دیا جاتا ہے۔ یہ استحالہ $ا_ر$ کو $ا_{ن-ر}$ میں بدل دیتا ہے یعنے ہر سر کا لاحقہ اپنے متمم میں بدل جاتا ہے۔

اب اگر ہم کسی ہم متغیر کو جس کا درجہ م ہے شکل

$$(ب، ب_۱، ب_۲، \ldots، ب_م)(لا، ۱)^م \ldots\ldots (۱)$$

میں لکھیں تو $ا، ا_۱، \ldots، ا_ن$، لا کو $ا_ن، ا_{ن-۱}، \ldots، ا، \frac{۱}{لا}$ میں بدلنے سے اس ہم متغیر کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے یعنے شکل ذیل

$$(-۱)^ک لا^{ن ھ-۲ک} (ج، ج_۱، ج_۲، \ldots، ج_م)(\frac{۱}{لا}، ۱)^م$$

یہ شکل چونکہ (۱) جیسے نمونہ کا لا کا ایک صحیح تفاعل ہے اس لئے دونوں شکلوں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$م = ن ھ - ۲ک، ب = (-۱)^ک ج_م، \ldots، ب_ر = (-۱)^ک ج_{م-ر}$$

اس طرح ہم متغیر کا درجہ تفاعل ف کے وزن اور رتبہ کی رقوم میں متعین ہو جاتا ہے اور یہ معلوم ہوتا ہے کہ مزدوج سر (یعنے وہ سر جو تفاعل کے ابتدائی اور آخری رقموں سے متساوی الفصل ہوتے ہیں) حسب ذیل طریقہ پر مربوط ہیں:۔

اگر ہم متغیر کا کوئی سر $فا(ا، ا_۱، ا_۲، \ldots، ا_ن)$ ہو تو اسکا مزدوج $(-۱)^ک فا(ا_ن، ا_{ن-۱}، \ldots، ا_۰)$ ہے۔

یہ خاصیت ہم متغیروں کے ساتھ مخصوص ہے اور نیم ہم متغیروں میں نہیں پائی جاتی اگرچہ عامل عف سے دونوں قسم کے تفاعلوں کو

بنانے کا طریقہ ایک ہی ہے جیسا کہ دفعہ آئندہ سے معلوم ہو گا۔
ہم متغیر کے درجہ کے لئے ھ اور کہ کی رقوم میں جو جملہ اوپر حاصل ہوا ہے اُس سے یعنی ن ھ - ۲ کہ سے حسب ذیل اہم نتیجے اخذ کئے جا سکتے ہیں :-

(۱) اگر اُ فہ ایک غیر متغیر ہے تو ن ھ = ۲ کہ
کیونکہ اِس صورت میں فہ اور سا ایک ہی تفاعل ہیں اور اسلئے اِن کے اوزان کہ اور ن ھ - کہ مساوی ہیں۔

(۲) طاق درجوں کے کثیر رقمیوں کے تمام غیر متغیر جفت رتبہ کے ہوتے ہیں۔
کیونکہ اگر ن طاق ہو تو مساوات ن ھ = ۲ کہ سے ظاہر ہے کہ ھ جفت ہونا چاہیئے اور کہ، ن کا ضعف۔

(۳) جفت درجوں کے کثیر رقمیوں کے تمام ہم متغیر جفت درجہ کے ہوتے ہیں۔ (117)
کیونکہ اس صورت میں ن ھ - ۲ کہ جفت ہے۔

(۴) طاق درجوں کے کثیر رقمیوں کے ہم متغیر جفت یا طاق درجہ کے ہوتے ہیں بموجب اسکے کہ اِنکے سروں کا رتبہ جفت یا طاق ہو۔

(۵) دو ہم متغیروں کا حاصل ہمیشہ ابتدائی کثیر رقمی کے سروں میں جفت رتبہ کا ہوتا ہے۔
کیونکہ حاصل کا رتبہ ہم متغیروں کے رتبوں اور اوزان کی رقوم میں

حسب ذیل ہے:-

$$\text{ھ}(\text{ن ھَ} - ۲\,\text{کہ}) + \text{ھَ}(\text{ن ھ} - ۲\,\text{کہ}) \equiv ۲(\text{ن ھ ھَ} - \text{ھ کَہ} - \text{ھَ کہ})$$

۱۶۹ - عامل عف کے ذریعہ سے ہم متغیروں کی ساخت

دفعہ ۱۶۴ سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ $\text{فا}(\text{ع}_{\text{ن}}، \text{ع}_{\text{ن}-۱}، \ldots، \text{ع}_۰)$ کا پھیلاؤ تفرقی احصاء کے ذریعہ شکل

$$\text{فا}_۰ + \text{لا عف فا}_۰ + \frac{\text{لا}^۲}{۱\times۲}\text{عف}^۲\text{فا}_۰ + \ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{۱\times۲\times۳\ldots\times\text{ر}}\text{عف}^{\text{ر}}\text{فا}_۰ + \ldots$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں $\text{فا}(\text{ع}_{\text{ن}}، \text{ع}_{\text{ن}-۱}، \ldots، \text{ع}_۰)$ میں لا = ۰ رکھنے سے $\text{فا}_۰$ حاصل ہوتا ہے یعنے

$$\text{فا}_۰ = \text{فا}(\text{ا}_{\text{ن}}، \text{ا}_{\text{ن}-۱}، \ldots، \text{ا}_۰)$$

اور
$$\text{عف} \equiv \text{ا}_۰\frac{\text{جف}}{\text{جف ا}_۱} + ۲\,\text{ا}_۱\frac{\text{جف}}{\text{جف ا}_۲} + ۳\,\text{ا}_۲\frac{\text{جف}}{\text{جف ا}_۳} + \ldots + \text{ن ا}_{\text{ن}-۱}\frac{\text{جف}}{\text{جف ا}_{\text{ن}}}$$

اس طریقہ سے ہم متغیر بنانے میں ماخذ فا جس سے ہم نے ابتدا کی ہے عف کے متواتر اعمال سے بدل جاتا ہے چنانچہ ہر عمل وزن کو بقدر ایک کے گھٹا دیتا ہے یہاں تک کہ ہم اصلی تفاعل $\text{فا}(\text{ا}_۰، \text{ا}_۱، \ldots، \text{ا}_{\text{ن}})$ پر پہنچتے ہیں جس سے ماخذ بنایا گیا تھا۔ چونکہ یہ فرقوں کا تفاعل ہے اس لئے وہ جملہ جو عف کے دوبارہ عمل سے حاصل ہوتا ہے معدوم ہو جاتا ہے اور ہم متغیر مکمل طور پر حاصل ہوتا ہے۔ عف کے اعمال کے جواب میں متشاکل تفاعل سا پر مف کے اعمال کا یہ اثر ہوگا کہ ہر قدم پر اصلوں کا درجہ بقدر

ایک کے گھٹ جائیگا اور آخری متشاکل تفاعل میں صرف اصلوں کے فرق شامل ہونگے۔ اس طرح متواتر اعمال سے ایک ہم متغیر کیلئے ہمیں دو جملے ملینگے، ایک اصلوں کی رقوم میں اور دوسرا سروں کی رقوم میں۔

یہ ظاہر ہے کہ ہم متغیر کا درجہ م، اُن اعمال منف کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے جو سا کو فہ میں تحویل کرنے میں کرنے پڑتے ہیں یعنے ہم متغیر کا درجہ م ابتدائی اور آخری سروں کے اوزان کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز چونکہ (118)

$$\text{سا}_0 = (\text{ع}_1 \text{ع}_2 \ldots \text{ع}_\text{ن})^\text{م} \, \text{فه} \left(\frac{1}{\text{ع}_1}, \frac{1}{\text{ع}_2}, \ldots, \frac{1}{\text{ع}_\text{ن}} \right)$$

اسلئے سا۰ کا وزن ن م ۔ ک ہے جہاں فہ (ع۱، ع۲، ...، عن) کا وزن ک ہے۔ پس ہم متغیر جسکا صدر سر $\text{ا}_0^\text{م}$ فہ ہے درجہ ن م ۔ ۲ ک کا ہے اور یہ وہی قیمت ہے جو پہلے حاصل ہوئی تھی۔

اس طریقہ کی وضاحت کے لئے ہم چند سادہ مثالیں دیتے ہیں۔

امثلہ

۱۔ کعبی

$$\text{ا}_0 \text{لا}^3 + 3\,\text{ا}_1 \text{لا}^2 + 3\,\text{ا}_2 \text{لا} + \text{ا}_3 = 0$$

کا (ہیسوی) بناؤ۔

تفاعل $\text{ه} \equiv \text{ا}_0 \text{ا}_2 - \text{ا}_1^2$ لینے سے دفعہ ۱۶۷ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ا}_0^2 \equiv \text{ع}^2 (\text{ب} - \text{ج})^2 = 18 (\text{ا}_1^2 - \text{ا}_1 \text{ا}_3)$$

داہنی طرف کے جملہ پر منف کا اور بائیں طرف کے جملہ پر عف کا عمل کرنے سے

$$\text{ا}_0^2 \equiv 2\,\text{ع} (\text{ب} - \text{ج})^2 = 18 (\text{ا}_1 \text{ا}_2 - \text{ا}_0 \text{ا}_3) \,\text{۔}$$

اور پھر اسی طرح عمل کرنے سے

$$ا_0^2 \equiv 2(ب - ج)^2 = 36(ا_1^2 - ا_0 ا_2)$$

اب اس مساوات پر پھر اسی طرح عمل کرنیکا نتیجہ یہ ہوگا کہ مساوات کی دونوں طرف کے جملے معدوم ہو جائینگے - پس مطلوبہ ہم متغیر دفعہ ۱۶۷ کے مطابق یہ ہے

$$(ا_0 ا_2 - ا_1^2) + (ا_0 ا_3 - ا_1 ا_2) لا + (ا_1 ا_3 - ا_2^2) لا^2$$

اسی کے ساتھ لا اور اصلوں کی رقوم میں متناظر جملہ ملجاتا ہے -

۲ ـ چار درجی

$$ا_0 لا^4 + 4 ا_1 لا^3 + 6 ا_2 لا^2 + 4 ا_3 لا + ا_4 = 0$$

کا (ہیسوی) بناؤ۔

وہ ہم متغیر چار درجی کا ہیسوی) کہلاتا ہے جسکا صدر سر $ه \equiv ا_0 ا_2 - ا_1^2$ ہے - اسکا درجہ ۴ ہے کیونکہ $ه = 2$ اور $ک = 2$ اور اسلئے $ن ه - 2 ک = 4$ - سروں کو ان کے متمم میں بدلنے سے ہم متغیر کا ماخذ $ا_2 ا_4 - ا_3^2$ ملتا ہے اور ہمیں آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے

$$ه_{لا} \equiv (ا_0 ا_2 - ا_1^2) لا^4 + 2(ا_0 ا_3 - ا_1 ا_2) لا^3 + (ا_0 ا_4 + 2 ا_1 ا_3 - 3 ا_2^2) لا^2$$
$$+ 2(ا_1 ا_4 - ا_2 ا_3) لا + (ا_2 ا_4 - ا_3^2)$$

(119) ۳ ـ کعبی کا وہ ہم متغیر بناؤ جسکا صدر سر نیم غیر متغیر گ ہو۔

گ میں جو سر شامل ہوتے ہیں ان کو انکے متمموں میں بدلنے سے ہمیں ہم متغیر کا ماخذ ملتا ہے

$$ا_0^2 ا_3 - 3 ا_0 ا_1 ا_2 + 2 ا_1^3$$

اور عف کا عمل کرنے سے ہمیں آسانی کے ساتھ ہم متغیر ذیل کی شکل میں حاصل ہوتا ہے :-

$$(ا_3^2 ا_0 - 3 ا_3 ا_2 ا_1 + 2 ا_2^3) + 3(ا_3 ا_2 ا_0 + ا_2^2 ا_1 - 2 ا_3 ا_1^2) لا - 3(ا_0 ا_1 ا_3 + ا_1^2 ا_2 - 2 ا_0 ا_2^2) لا^2$$
$$- (ا_0^2 ا_3 - 3 ا_0 ا_1 ا_2 + 2 ا_1^3) لا^3$$

اس میں مزدوج سر علامت اور نیز متمموں کے باہمی تبادلہ کے لحاظ سے مختلف ہیں اور گ کا وزن طاق ہے۔ طالب علم اس ہم متغیر کو لا اور اصلوں کی رقوم میں گ کی اس قیمت کی مدد سے جو مثال ۱۵ دفعہ ۲۷ میں دی گئی ہے آسانی کے ساتھ بیان کر سکتا ہے۔

۱۷۰۔ مسئلہ۔ ہم متغیر یا نیم متغیر کی اصلوں کے فرقوں کا کوئی تفاعل اصلی مساوات کی اصلوں کے فرقوں کا ایک تفاعل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم متغیر یا نیم ہم متغیر ہے

فہ (لا) ≡ (لا − غہ۱) (لا − غہ۲) .... (لا − غہن)

چونکہ فہ تفاعل ہے لا، غہ۱، غہ۲، .... غہن کے فرقوں کا اسلئے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \text{مف فہ} \equiv 0،$$

یعنے فہَ (لا) + ∑ (لا − غہ۲) (لا − غہ۳) ... (لا − غہن) مف غہ۱ ≡ ۰

اب لا کی بجائے ہر اصل غہ۱، غہ۲، .... ترتیب وار درج کرو تو

فہَ (غہ۱) (۱ + مف غہ۱) = ۰، فہَ (غہ۲) (۱ + مف غہ۲) = ۰، وغیرہ

اسلئے مف غہ۱ + ۱ = ۰، مف غہ۲ + ۱ = ۰، .... مف غہر + ۱ = ۰، ....

اور اسلئے مف (غہر − غہک) = ۰۔

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

صفحات گذشتہ میں بہت سی مثالیں دی گئی ہیں جنمیں ہم متغیروں یا نیم ہم متغیروں کی اصلوں کو اصلی مساوات کی اصلوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے اور طالب علم آسانی کے ساتھ اس بات کی تصدیق کر سکتا ہے کہ

(120)

کسی ایسے جملہ پر مف کے عمل کا نتیجہ ۔ ا ہے ۔ پچھلی دفعہ کی مثالوں ۱ اور ۳ کے ہم متغیروں کی اصلیں مثال ۲۵ صفحہ ۹۷ اور مثال ۱۳ صفحہ ۱۲۷ جلد اول میں دی گئی ہیں اور نیم ہم متغیروں کی اصلیں امثلہ ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴ صفحات ۱۲۵ تا ۱۲۷ جلد اول میں ملینگی۔

اوپر کا ثابت شدہ مسئلہ دو یا زیادہ ہم متغیروں یا نیم ہم متغیروں کی اصلوں کے فرقوں کے کسی تفاعل کے لئے صریحاً درست ہے۔

۱۷۱ ۔ دوہرے خطی استحالہ کا استعمال ہم متغیروں کے نظریہ پر

ابتک ہم نے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے نظریہ پر مساواتوں کی اصلوں کے واسطے سے بحث کی ہے ۔ اب ہم ایک جداگانہ اور عام تر طریقہ کا کچھ ذکر کرینگے جسکی مدد سے اس نظریہ کی توسیع ایسے کثیر رقمیوں کیلئے ہوسکتی ہے جو دو سے زیادہ متغیروں میں متجانس ہیں مثلاً وہ کثیر الارقام جو اس نظریہ کے متعدد اہم ہندسی اطلاقات میں پیش ہوتے ہیں۔ اگرچہ اس مضمون کی اسقدر توسیع کرنا اس کتاب کی حدود کے باہر ہے لیکن ہم مناسب سمجھتے ہیں کہ جو طریقہ ہم نے اختیار کیا ہے اور جس عام تر طریقہ کا حوالہ دیا ہے ان دونوں کے درمیان جو تعلق ہے اسکو دکھا دیا جائے۔

مسئلہ ۱ ۔ فرض کرو کہ کوئی کثیر رقمی

$$ع_ن \equiv ا_. (لا - عہ_ا ما)(لا - عہ_۲ ما) \ldots (لا - عہ_ن ما)$$

ابدال

$$لا = لہ لاَ + مہ ماَ ، ما = لَہ لاَ + مَہ ماَ$$

کے ذریعہ مستحیل کیا گیا ہے۔ تب اگر ان دونوں شکلوں $ع_ن$ اور $عَ_ن$ کے جواب میں غیر متغیر ع اور عَ ہوں تو

عَ = (لہ مہَ - لَہ مہ)^ک ع

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

ع = اِ ∑ (عہ۱ - عہ۲)^ا (عہ۱ - عہ۳)^ب .... (عہ۱ - عہن)^ل

جہاں ∑ کی ہر رقم میں ہر اصل قوت ھ میں داخل ہوتی ہے۔ جب عن کے کسی جزو ضربی مثلاً لا - عہ۱ ما کو مستحیل کیا جاتا ہے تو

لا - عہ۱ ما = (لہ - لَہ عہ۱)(لاَ - عہَ۱ ماَ)، جہاں عہَ۱ = (مہَ عہ۱ - مہ) / (لہ - لَہ عہ۱) ،

اسلئے

عَن = اَ (لاَ - عہَ۱ ماَ)(لاَ - عہَ۲ ماَ) . . . (لاَ - عہَن ماَ)

جہاں اَ = اِ (لہ - لَ عہ۱)(لہ - لَ عہ۲) . . . (لہ - لَ عہن) (121)

نیز عَن کی کسی دو اصلوں کے فرق کیلئے

عہَق - عہَر = (لہ مہَ - لَہ مہ)(عہق - عہر) / (لہ - لَہ عہق)(لہ - لَہ عہر)

اب اَ کی بجائے اور عَ میں جو اصلوں کے فرق داخل ہوتے ہیں اُن سب کی بجائے اندراجات عمل میں لائے جائیں تو کسروں کے نسب نما جو استحالہ کی وجہ سے داخل ہوتے ہیں علٰحدہ ہو جاتے ہیں اور بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے

عَ = (لہ مہَ - لَہ مہ)^ک ع

مسئلہ ۲ ۔ اگر کثیر رقمی عن کا ایک ہم متغیر فہ (لا، ما) ہو تو خطی استحالہ کے بعد فہ کی نئی قیمت

(لہ مہَ - لَہ مہ)^ک فہ (لا، ما)

ہو گی۔

اسکا ثبوت گذشتہ مسئلہ کے ثبوت کے مشابہ ہے۔ فرض کرو کہ

فہ (لا، ما) = ا Σ (ع۱ ـ ع۲)^ا (ع۲ ـ ع۳)^ب ... (لا ـ ع۱ ما)^ق (لا ـ ع۲ ما)^ق ....

جہاں ہر اصل قوت ھ میں داخل ہوتی ہے۔
اب پچھلے مسئلہ کی طرح فہ (لا، ما) کی اس قیمت کو مستحیل کرو تو چونکہ نسب نما میں اجزائے ضربی لہ ـ لَہ ع۱، لہ ـ لَہ ع۲ ... سب کے سب ایک ہی درجہ ھ میں داخل ہوتے ہیں اسلئے وہ سب ضیارب اکٹھے سے ضرب دینے پر علیحدہ ہو جاتے ہیں اور فہ (لا، ما) کی استحالہ شدہ قیمت حاصل ہوتی ہے

(لہ مہ ـ لَہ مہ)^کہ فہ (لا، ما)

مقطع لہ مہ ـ لَہ مہ کو جسکے عناصر وہ سر ہیں جو دوسرے خطی استحالہ میں داخل ہوتے ہیں **استحالہ کا مقیاس** کہتے ہیں۔

مساوات ع^ن = ۰ کی اصلوں کے حوالہ کے بغیر ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ شکل

ع^ن ≡ ا۰ لا^ن + ن ا۱ لا^(ن-۱) ما + $\frac{ن (ن-۱)}{۱ \times ۲}$ ا۲ لا^(ن-۲) ما^۲ + ... + ان ما^ن

کے کثیر رقمی پر لا اور ما کا استحالہ عمل میں لایا گیا ہے۔
اوپر کے مسئلے جو اُن غیر متغیروں اور ہم متغیروں کے لحاظ سے
(122) ثابت کئے گئے ہیں جو اصلوں کے تفاعل ہیں اسوقت بھی درست رہینگے جب ان تفاعلوں کو سروں کی رقوم میں انکی معادل اشکال میں بیان کیا جائے اسلئے ہم ان مسئلوں کو شکل ذیل میں بھی بیان کر سکتے ہیں:۔

مسئلہ ا۔ غیر متغیر کثیر رقمی کے سروں کا ایک ایسا تفاعل ہے کہ جب متغیروں کے خطی استحالہ سے کثیر رقمی کو مستحیل کیا جاتا ہے تو

نئے سروں کا وہی تفاعل ابتدائی تفاعل اور استحالہ کے مقیاس کی ایک قوت کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

مسئلہ ۲ ۔ ہم متغیر کثیر رقمی کے سروں کا اور نیز متغیروں کا ایک ایسا تفاعل ہے کہ جب خطی استحالہ سے کثیر رقمی کو مستحیل کیا جاتا ہے تو نئے متغیروں اور سروں کا وہی تفاعل ابتدائی تفاعل اور استحالہ کے مقیاس کی ایک قوت کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

اوپر کے مسئلوں میں جو تعریفیں دی گئی ہیں اُن کا اطلاق صریحاً اُن کثیر رقمیوں پر بھی ہوسکتا ہے جو کئی متغیروں میں متجانس ہوں اور اس لئے یہ تعریفیں ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے اُس وسیع تر نظریہ کی بنیاد قرار پاتی ہیں جس کا حوالہ دیا جا چکا ہے۔ امثلہ ذیل میں ایک مثال دی گئی ہے جس میں تین متغیروں والے کثیر رقمی کے لئے غیر متغیر حاصل کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ خطی استحالہ

لا = لہ لا + مہ ما ، ما = لہ$_1$ لا + مہ$_1$ ما

سے اگر

ا لا^2 + ۲ ب لا ما + ج ما^2 = ا لا^2 + ۲ ب لا ما + ج ما^2

تو ثابت کرو کہ

ا ج − ب^2 = (لہ مہ$_1$ − لہ$_1$ مہ)^2 (ا ج − ب^2)

۲۔ اُسی استحالہ سے اگر

(ا، ب، ج، د، س)(لا، ما)^{۴} = (اَ، بَ، جَ، دَ، سَ)(لاَ، ماَ)^{۴}

تو ثابت کرو کہ

اَسَ - ۴ بَ دَ + ۳ جَ^{۲} = (لہ$_{۱}$ مہ$_{۲}$ - لہ$_{۲}$ مہ$_{۱}$)^{۴} (ا س - ۴ ب د + ۳ ج^{۲})

۳۔ اُسی استحالہ سے اگر

ا لا^{۲} + ۲ ب لا ما + ج ما^{۲} = اَ لاَ^{۲} + ۲ بَ لاَ ماَ + جَ ماَ^{۲}،

اور ا$_{۱}$ لا^{۲} + ۲ ب$_{۱}$ لا ما + ج$_{۱}$ ما^{۲} = اَ$_{۱}$ لاَ^{۲} + ۲ بَ$_{۱}$ لاَ ماَ + جَ$_{۱}$ ماَ^{۲}

تو ثابت کرو کہ

اَ جَ$_{۱}$ + اَ$_{۱}$ جَ - ۲ بَ بَ$_{۱}$ = (لہ$_{۱}$ مہ$_{۲}$ - لہ$_{۲}$ مہ$_{۱}$)^{۲} (ا ج$_{۱}$ + ا$_{۱}$ ج - ۲ ب ب$_{۱}$)

دو درجی اشکال

(ا + کہ ا$_{۱}$) لا^{۲} + ۲ (ب + کہ ب$_{۱}$) لا ما + (ج + کہ ج$_{۱}$) ما^{۲}

= (اَ + کہ اَ$_{۱}$) لاَ^{۲} + ۲ (بَ + کہ بَ$_{۱}$) لاَ ماَ + (جَ + کہ جَ$_{۱}$) ماَ^{۲}

میں مثال (۱) کی مدد سے نتیجہ اخذ کرو اور پھر طرفین میں "کہ" کے سروں کا مقابلہ کرو تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

(123) پس ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ اگر دو درجہ دوم کے جملوں سے ایک موسیقی نظام متعین ہو تو خطی استحالہ سے حاصل شدہ نئے درجہ دوم کے جملوں سے بھی ایک موسیقی نظام بنتا ہے۔ کیونکہ اگر انکی اصلیں عہ، بہ اور عہ$_{۱}$، بہ$_{۱}$ ہیں تو

ا ا$_{۱}$ {(عہ - عہ$_{۱}$)(بہ - بہ$_{۱}$) + (عہ - بہ$_{۱}$)(بہ - عہ$_{۱}$)} = ۲ (ا ج$_{۱}$ + ا$_{۱}$ ج - ۲ ب ب$_{۱}$)

۴۔ اگر خطی استحالہ

لا = لہ$_{۱}$ لاَ + مہ$_{۱}$ ماَ + نہ$_{۱}$ یَ، ما = لہ$_{۲}$ لاَ + مہ$_{۲}$ ماَ + نہ$_{۲}$ یَ،

ی = لہ۲ لا + مہ۲ ما + نہ۲ ہے

سے تین متغیروں کا متجانس دو درجی تفاعل

ا لا۲ + ب ما۲ + ج ی۲ + ۲ ف ما ی + ۲ گ ی لا + ۲ ھ لا ما

ذیل کے تفاعل

ا لا۲ + ب ما۲ + ج ے۲ + ۲ف ما ے + ۲گ ے لا + ۲ھ لا ما

میں تحویل ہو جائے تو ثابت کرو کہ

| ا ھ گ |
| ھ ب ف |
| گ ف ج | = (لہ۱ مہ۲ نہ۳)۲ | ا ھ گ |
| ھ ب ف |
| گ ف ج |

جہاں مقطع (لہ۱ مہ۲ نہ۳) استحالہ کا مقیاس ہے۔
استحالہ کے مقیاس کو شکل

| لہ۱ لہ۲ لہ۳ |
| مہ۱ مہ۲ مہ۳ |
| نہ۱ نہ۲ نہ۳ |

میں لکھو اور اصلی سروں کے مجوزہ مقطع کو استحالہ کے اس مقیاس سے علی الترتیب دو مرتبہ ضرب دو۔ حاصل ہونیوالے مقطع کے عناصر اور لا۲، ما۲ وغیرہ کے پھیلائے ہوئے سروں میں مقابلہ کرو تو مطلوبہ نتیجہ کی تصدیق ہو جاتی ہے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ وہ مقطع جس پر یہاں بحث کیگئی ہے تین متغیروں کے دئے ہوئے تفاعل کا ایک غیر متغیر ہے۔

۱۷۲ - خطی استحالہ سے اخذ شدہ ہم متغیروں کے خواص۔

اب ہم دفعہ ۱۷۱ کے مسئلہ ۲ کی دوسری شکل کو ہم متغیر کی تعریف کے طور پر لے کر یہ بتائینگے کہ سروں کو معلوم کرنے کا وہ قانون جو دفعہ ۱۶۹ میں

دیا گیا ہے کس طرح فوراً حاصل ہوتا ہے یعنی ہم یہ بتائینگے کہ اگر کوئی ایک سر دیا جائے تو باقی تمام سر متعین کئے جا سکتے ہیں۔

اس مقصد کے لئے خطی استحالہ

لا = لا + ھ ما ، ما = ۰ × لا + ما

کو عمل میں لانے سے (جسکا مقیاس ایک ہے) کثیر رقمی

(ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، . . . . . ، ان) (لا ، ما)ن

بدلکر

(ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، . . . ، ان) (لا ، ما)ن

ہو جاتا ہے جہاں

ا۰ = ا۰ ، ا۱ = ا۱ + ا۰ ھ ، ا۲ = ا۲ + ۲ ا۱ ھ + ا۰ ھ۲ ، وغیرہ

(دفعہ ۳۵)

اب اگر اس کثیر رقمی کا کوئی ہم متغیر فہ (ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، . . . ، ان ، لا ، ما) ہو تو تعریف کی رو سے (124)

فہ (ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، . . . ، ان ، لا ، ما) = فہ (ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، . . . ، ان ، لا ، ما)

یعنی فہ (ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، . . . ، ان ، لا ، ما) = فہ (ا۰ ، ا۱ ، ا۲ ، . . . ، ان ، لا - ھ ما ، ما)

اس مساوات کے دوسرے رکن کو پھیلاؤ اور صرف اُن رقموں تک اپنی توجہ محدود رکھو جو ھ سے مضروب ہیں تو چونکہ جف ار / جف ھ = ر ار-۱ جبکہ وہ ارقام نظر انداز کر دیجائیں جو نتیجہ میں ھ۲ ، ھ۳ ، وغیرہ سے مضروب ہیں اسلئے ہمیں پھیلاؤ حاصل ہوتا ہے

فہ + ھ (- ما $\frac{\text{جغ فہ}}{\text{جق لا}}$ + عف (فہ)) + ھ^{۲} ( ) + ... ≡ فہ

جسکو درست رہنا چاہئے خواہ ھ کی قیمت کچھ ہی ہو ۔ پس

ما $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرلا}}$ ≡ ا$_{۱}$ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرا}_{۱}}$ + ۲ ا$_{۲}$ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرا}_{۲}}$ + ۳ ا$_{۲}$ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرا}_{۳}}$ + ... + ن ا$_{ن-۱}$ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرا}_{ن}}$ (ا)

اور فہ کی بجائے قیمت

(ب، ب$_{۱}$، ب$_{۲}$، ...، ب$_{م}$) (لا، ما)^{م}

درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

م ب لا$^{م-۱}$ ما + م (م - ۱) ب$_{۱}$ لا$^{م-۲}$ ما^{۲} + ... + م ب$_{م-۱}$ ما^{م} ،

≡ عف ب لا^{م} + م عف ب$_{۱}$ لا$^{م-۱}$ ما + ... + عف ب$_{م}$ ما^{م}

اور اس میں سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں :-

عف ب = ۰، عف ب$_{۱}$ = ب، عف ب$_{۲}$ = ۲ ب$_{۱}$، ....،

عف ب$_{م}$ = م ب$_{م-۱}$

یہ مساواتیں ماخذ ب$_{م}$ سے سروں کو معلوم کرنیکا قانون متعین کرتی ہیں صدر سر ب فرقوں کا ایک تفاعل ہے کیونکہ عف ب = ۰ ۔

سروں کو محسوب کرنیکے عمل میں ذیل کے مسئلہ سے سہولت پیدا ہوتی ہے ۔ یہ مسئلہ مختلف اصولوں پر قبل ازیں ثابت کیا جا چکا ہے

ہم متغیر کے دو سر جو ابتدائی اور آخری رقموں سے متساوی انفصل ہوں مساوی (مثبت یا منفی) ہو جاتے ہیں جب ان میں سے کسی ایک میں ا، ا$_{۱}$، ....، ا$_{ن}$ کی جگہ علی الترتیب ا$_{ن}$، ا$_{ن-۱}$، ....، ا رکھے جائیں ۔

اِسکو ثابت کرنیکے لئے فرض کرو کہ کثیر رقمی کو خطی استحالہ

لا = ۰ × لا + ما ، ما = لا + ۰ × ما (جسکا مقیاس = -۱)

سے مستحیل کیا گیا ہے - اس طرح

(ا۰، ا۱، ا۲، ....، ان)(لا، ما)^ن ≡ (ان، ان-۱، ....، ا۰)(لا، ما)^ن

لیکن تعریف کی رو سے کوئی ہم متغیر

فہ(ان، ان-۱، ....، ا۰، لا، ما) = (-۱)^ک فہ(ا۰، ا۱، ا۲، ....، ان، لا، ما)

≡ (-۱)^ک فہ(ا۰، ا۱، ا۲، ....، ان، ما، لا)

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہم متغیر کے سر جو ابتدائی اور انتہائی رقموں سے متساوی الفصل ہیں شکل میں مشابہ ہیں اور مماثل ہو جاتے ہیں (سوائے علامت میں اگر کہ طاق ہو) جبکہ لاحقوں کی بجائے اِنکی متمم قیمتیں درج کیجاتی ہیں -

اسی طرح یہ بھی آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کوئی ہم متغیر ذیل کی تفرقی مساوات

لا (جف فہ / جف ما) ≡ ان (جف فہ / جف ان-۱) + ۲ ان-۱ (جف فہ / جف ان-۲) + ۳ ان-۲ (جف فہ / جف ان-۳) + ...

.... + ن ا۱ (فر فہ / فر ا۰)　　(۲)

کو اور مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے -

نیز اگر کثیر رقمی کا ایک غیر متغیر فہ(ا۰، ا۱، ا۲، ....، ان) ہو تو اس دفعہ کے پہلے استحالہ سے دفعہ ۱۷۱ کی تعریف کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

فہ(ا۰، ا۱، ا۲، ...، ان) = فہ(ا۰، ا۱، ا۲، ...، ان)

اور حسب سابق عمل کرنے سے ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متغیر کو یہ دونوں تفرقی مساواتیں

$$\text{ا}_0\frac{\text{جف فه}}{\text{جف ا}_1}+2\,\text{ا}_1\frac{\text{جف فه}}{\text{جف ا}_2}+3\,\text{ا}_2\frac{\text{جف فه}}{\text{جف ا}_3}+\dots\dots+\text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\frac{\text{جف فه}}{\text{جف ا}_{\text{ن}}}=0،$$

$$\text{ا}_{\text{ن}}\frac{\text{جف فه}}{\text{جف ا}_{\text{ن}-1}}+2\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\frac{\text{جف فه}}{\text{جف ا}_{\text{ن}-2}}+3\,\text{ا}_{\text{ن}-2}\frac{\text{جف فه}}{\text{جف ا}_{\text{ن}-3}}+\dots\dots+\text{ن}\,\text{ا}_1\frac{\text{جف فه}}{\text{جف ا}_0}=0،$$

پوری کرنی چاہئیں جنمیں سے کوئی ایک دوسری میں شامل سمجھی جا سکتی ہے کیونکہ اگر ہم خطی استحالہ

$$\text{لا}=\text{ما}'\text{،}\quad \text{ما}=\text{لا}'\text{،}\qquad (\text{جسکا مقیاس}=-1)$$

کو عمل میں لائیں تو غیر متغیر کی تعریف کی رو سے

$$\text{فه}(\text{ا}_{\text{ن}}\text{،}\ \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{،}\ \text{ا}_{\text{ن}-2}\text{،}\dots\text{،}\ \text{ا}_0)=(-1)^{\text{ک}}\,\text{فه}(\text{ا}_0\text{،}\ \text{ا}_1\text{،}\ \text{ا}_2\text{،}\dots\text{،}\ \text{ا}_{\text{ن}})$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ غیر متغیر کثیر رقمی کے سروں کا ایک ایسا (126)
تفاعل ہے جو نہیں بدلتا (سوائے علامت میں اگر وزن طاق ہو) جبکہ سر سیدھی یا الٹی ترتیب میں لکھے جاتے ہیں۔

اب غیر متغیروں اور نیم غیر متغیروں، ہم متغیروں اور نیم ہم متغیروں کے درمیان جو ربط ہے وہ واضح ہے۔ کثیر رقمی $(\text{ا}_0\text{،}\ \text{ا}_1\text{،}\ \text{ا}_2\text{،}\dots\ \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا}\text{،}\ \text{ما})^{\text{ن}}$ کے غیر متغیر اوپر لکھی ہوئی دونوں تفرقی مساواتوں کو پورا کرتے ہیں لیکن $(\text{ا}_0\text{،}\ \text{ا}_1\text{،}\dots\text{،}\ \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا}\text{،}\ 1)^{\text{ن}}$ کے نیم غیر متغیر انمیں سے صرف پہلی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اسی طرح $(\text{ا}_0\text{،}\ \text{ا}_1\text{،}\dots\text{،}\ \text{ا}_{\text{ن}})(\text{لا}\text{،}\ 1)^{\text{ن}}$ کے نیم ہم متغیر صرف مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں لیکن ہم متغیر دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتے ہیں۔

کثیر رقمیوں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی نوعیت کو واضح جن دو طریقوں سے اِن دو تفاعلوں پر بحث کی جا سکتی ہے اِن کا درمیانی تعلق سمجھا دینے کے بعد اب ہم چند مسئلے ثابت کرینگے جو کثیر رقمیوں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت میں (جب کثیر رقمیوں کو خطی ابدال کے ذریعہ مستحیل کیا جاتا ہے) کثرت سے استعمال ہوتے ہیں۔ وہ طلباء جو اس مضمون کا مطالعہ پہلی مرتبہ کر رہے ہوں اسکو یہیں چھوڑ کر اگلا باب پڑھ سکتے ہیں جسمیں دو درجی، تین درجی، چار درجی کی صورتوں میں وہ اصول استعمال ہوئے ہیں جنکی صراحت کیجا چکی ہے۔

۱۷۳ – مسئلہ ۱ – فرض کرو کہ ن ویں درجہ کا کوئی متجانس کثیر رقمی ف (لا، ما) استحالہ

$$\text{لا} = \text{لہ لاَ} + \text{مہ ماَ} ، \text{ما} = \text{لَہ لاَ} + \text{مَہ ماَ}$$

سے فا (لاَ، ماَ) ہوجاتا ہے اور نیز فرض کرو کہ لا، ما کا کوئی اور تفاعل ع اسی استحالہ سے عَ ہو جاتا ہے تو

$$\text{م}^{\text{ن}}\,\text{ف}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} ، -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) = \text{فا}\left(\frac{\text{جف عَ}}{\text{جف ماَ}} ، -\frac{\text{جف عَ}}{\text{جف لاَ}}\right) \quad (1)$$

جہاں م استحالہ کا مقیاس ہے۔

ثبوت :- مساواتوں

$$\text{لا} = \text{لہ لاَ} + \text{مہ ماَ} ، \text{ما} = \text{لَہ لاَ} + \text{مَہ ماَ}$$

کو حل کرنے سے

$$\text{م لاَ} = \text{مَہ لا} - \text{مہ ما} ، \text{م ماَ} = -\text{لَہ لا} + \text{لہ ما}$$

اسلئے

$$\text{م}\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف لا}} = \text{مَہ} ، \text{م}\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف ما}} = -\text{مہ} ، \text{م}\frac{\text{جف ماَ}}{\text{جف لا}} = -\text{لَہ} ، \text{م}\frac{\text{جف ماَ}}{\text{جف ما}} = \text{لہ} ،$$

لیکن

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}'}\times\frac{\text{جف لا}'}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}'}\times\frac{\text{جف ما}'}{\text{جف لا}}$$

$$= \frac{1}{\text{م}}\left(\text{مہ}'\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}'} - \text{لہ}'\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}'}\right),$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}'}\,\frac{\text{جف لا}'}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}'}\,\frac{\text{جف ما}'}{\text{جف ما}}$$

$$= \frac{1}{\text{م}}\left(-\,\text{مہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}'} + \text{لہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}'}\right)$$

اِن مساواتوں کو اِس شکل میں رکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{لہ}\left(\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}'}\right) + \text{مہ}\left(-\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}'}\right),$$

$$-\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{لہ}'\left(\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}'}\right) + \text{مہ}'\left(-\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}'}\right)$$

اور چونکہ

$$\text{ف}\,(\text{لہ لا} + \text{مہ ما}،\ \text{لہ}'\,\text{لا} + \text{مہ}'\,\text{ما}) \equiv \text{فا}\,(\text{لا}'،\ \text{ما}')$$

اسلئے لا اور ما کو علی الترتیب $\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}'}$ اور $-\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}'}$ میں بدلنے سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

بالکل اسی طرح لا اور ما کو

$$\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}'}،\ -\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}'}$$

میں بدلکر یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\text{م}^{n}\,\text{ف}\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}،\ -\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\right)\text{ع} = \text{فا}\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}'}،\ -\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}'}\right)\text{ع} \quad ...(۲)$$

نتائج (۱) اور (۲) کو ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے بنانے میں استعمال کیا جا سکتا ہے جیسا کہ اب ہم بیان کرینگے۔

فرض کرو کہ ف (لا، ما) اور ع کسی تیسرے کثیر رقمی و کے ہم متغیر ہیں جہاں و مخصوص صورت کے طور پر ان میں سے کسی ایک کے ساتھ متماثل ہو سکتا ہے۔ خطی استحالہ کے ذریعہ کثیر رقمی و کو تحویل کرو اور فرض کرو کہ و کے نئے سروں اور لا، ما کی رقوم میں بیان شدہ وہی ہم متغیر فاج (لا، ما) اور عج سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب دفعہ ۱۷۱ مسئلہ ۲ کی رو سے

$$مٗ^پ فا (لا، ما) = فاج (لا، ما)$$

اور

$$مٗ^ق ع = عج$$

(128) پس ان مساواتوں سے (۱) میں اندراج کرنے سے

$$مٗ ف \left(\frac{جفا ع}{جفا ما}، - \frac{جفا ع}{جفا لا}\right) = فاج \left(\frac{جفا عج}{جفا ما} - \frac{جفا عج}{جفا لا}\right)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ $ف \left(\frac{جفا ع}{جفا ما}، - \frac{جفا ع}{جفا لا}\right)$، و کا ایک ہم متغیر ہے۔

اور اسی طرح (۲) سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ

$$ف \left(\frac{جفا}{جفا ما}، - \frac{جفا}{جفا لا}\right) ع$$

سے و کا ایک غیر متغیر یا ہم متغیر حاصل ہوتا ہے بموجب اسکے کہ ع، ن ویں یا اس سے اعلیٰ رتبہ کا ہو۔

غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو اس طریقہ سے بنانے کی چند مثالیں

ذیل میں دیجاتی ہیں۔

مثالیں

۱۔ اگر کثیر رقمی $(\text{ا، ب، ج، د، س})(\text{لا، ما})^{۴} = \text{۶}$ میں لا اور ما کی بجائے $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ ، $-\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ درج کئے جائیں اور حاصل ہونیوالے عمل کی تکمیل خود کثیر رقمی پر کی جائے تو ثابت کرو کہ غیر متغیر ع حاصل ہوتا ہے۔
ہم معلوم کرتے ہیں

$$(\text{ا، ب، ج، د، س})\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}، -\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\right)^{۴}\text{۶} = \text{۴۸}(\text{ا س} - \text{۴ ب د} + \text{۳ ج}^{۲})$$

۲۔ چار درجی کے ہیسوی $\text{ھ}_{\text{لا}}$ (مثال ۲ دفعہ ۱۶۹) پر اسی عمل کی تکمیل کرنے سے ثابت کرو کہ غیر متغیر جے حاصل ہوتا ہے۔
یہاں ہم معلوم کرتے ہیں

$$(\text{ا، ب، ج، د، س})\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}، -\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\right)^{۴}\text{ھ}_{\text{لا}} =$$
$$\text{۲۴}(\text{ا ج س} + \text{۲ ب ج د} - \text{ا د}^{۲} - \text{س ب}^{۲} - \text{ج}^{۳})$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$(\text{ا، ب، ج، د})\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}، -\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\right)^{۳}\text{گ}_{\text{لا}}$$
$$= -\text{۱۲}(\text{ا}^{۲}\text{د}^{۲} - \text{۶ ا ب ج د} + \text{۴ ا ج}^{۳} + \text{۴ ب}^{۳}\text{د} - \text{۳ ب}^{۲}\text{ج}^{۲})$$

جہاں کعبی $(\text{ا، ب، ج، د})(\text{لا، ما})^{۳}$ کا کعبی ہم متغیر $\text{گ}_{\text{لا}}$ ہے (مثال ۳ دفعہ ۱۶۹)

۴۔ $(\text{ا ج} - \text{ب}^{۲})\left(\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ما}}\right)^{۲} - (\text{ا د} - \text{ب ج})\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لا}}$
$+ (\text{ب د} - \text{ج}^{۲})\left(\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لا}}\right)^{۲}$

کی قیمت معلوم کرو جہاں ع ≡ (ا، ب، ج، د) (لا، ما)^{۳}

جواب :- ۹۰ ھ^{۲}

۱۷۴ — مسئلہ ۲ — اگر (ا، ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ... ، ا$_{ن}$) (لا، ما)^{ن} کا (129)
ایک غیر متغیر ف (ا، ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ... ، ا$_{ن}$) ہو اور ن ویں یا
اس سے اعلیٰ تر درجہ کا کوئی کثیر رقمی ع تو

$$ف\left(\frac{جف^{ن}ع}{جف\,لا^{ن}}، \frac{جف^{ن}ع}{جف\,لا^{ن-۱}\,جف\,ما}، \frac{جف^{ن}ع}{جف\,لا^{ن-۲}\,جف\,ما^{۲}}، \ldots، \frac{جف^{ن}ع}{جف\,ما^{ن}}\right)$$

ع کا ایک غیر متغیر یا ہم متغیر ہے ۔

ثبوت :- فرض کرو

$$لا = لہ\,لاَ + مہ\,ماَ ، \quad لاَ = لہ\,لا + مہ\,ما ،$$
$$ما = لَہ\,لاَ + مَہ\,ماَ ، \quad ماَ = لَہ\,لا + مَہ\,ما$$

تو پچھلے مسئلے کی طرح مستحیل کرنے سے

$$لاَ\,\frac{جف}{جف\,لا} + ماَ\,\frac{جف}{جف\,ما} = لاَ\,\frac{جف}{جف\,لا} + ماَ\,\frac{جف}{جف\,ما}$$

اور نیز ع کو مستحیل کرنے سے

$$ع = ع$$

اسلئے

$$\left(لاَ\,\frac{جف}{جف\,لا} + ماَ\,\frac{جف}{جف\,ما}\right)^{ن} ع = \left(لاَ\,\frac{جف}{جف\,لا} + ماَ\,\frac{جف}{جف\,ما}\right)^{ن} ع$$

اس مساوات کو پھیلا کر شکل

$$(عف_{۰}، عف_{۱}، عف_{۲}، \ldots، عف_{ن})(لاَ، ماَ)^{ن}$$

= (عف، عف۱، عف۲، .... عفن) (لاَ، ماَ)ن

میں لکھنے سے غیر متغیر کی تعریف کی رو سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ف (عف، عف۱، عف۲، ...) = مٰ ق ف (عف، عف۱، عف۲، ... عفن)

جس سے یہ ثابت ہے کہ ف (عف، عف۱، عف۲، ... ، عفن) ایک غیر متغیر یا ہم متغیر ہے۔

جب اس طرح لا، ما اور لاَ، ماَ کو مستحیل کیا جاتا ہے جس طرح اس مسئلہ میں کیا گیا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ متغیر ہم استحالہ متغیر ہیں۔ اور عام صورت میں متغیروں کی کسی تعداد کے لئے جبکہ وہ سر جو ایک جٹ کے استحالہ میں داخل ہوتے ہیں وہی ہوں جو دوسرے جٹ کے استحالہ میں داخل ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ یہ دونوں جٹ ہم استحالہ ہیں۔

وہ تفاعل جو مساوات (۱) میں واقع ہوتے ہیں مستخرجات کہلاتے ہیں۔ اس مساوات کی بائیں جانب کا جملہ ع کا ن وال مستخرجہ ہے۔ (130)

مثالیں

۱۔ فرض کرو کہ دو درجی

ا لاَ۲ + ۲ ا۱ لا ما + ا۲ ما۲

بدلکر

اَ لاَ۲ + ۲ اَ۱ لاَ ماَ + اَ۲ ماَ۲

ہو جاتا ہے تو مثال ا دفعہ ۱، ۱ کے مطابق

اَ اَ۲ - اَ۱۲ = م۲ (ا ا۲ - ا۱۲)

اب چونکہ

لاَ۲ (جف۲ ع / جف لاَ۲) + ۲ لاَ ماَ (جف۲ ع / جف لاَ جف ماَ) + ماَ۲ (جف۲ ع / جف ماَ۲)

$$= \text{لاَ}^2 \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + 2\,\text{لاَ ماَ} \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ماَ}^2 \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}$$

اسلئے اس آخری نتیجہ میں لاَ، ماَ اور لا، ما کو متغیر سمجھنے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} - \left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2$$

$$= \text{م}^2 \left\{ \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} - \left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \right\}$$

اس سے دو درجی کا ایک غیر متغیر اور کسی اعلیٰ کثیر رقمی کا ایک ہم متغیر (جس کو ہیسوی کہتے ہیں) حاصل ہوتا ہے۔

۲ ـ اگر ع، تفاعلوں

$$(\text{ا، ب، ج، د})(\text{لا، ما})^3 \quad \text{اور} \quad (\text{ا، ب، ج، د، س})(\text{لا، ما})^4$$

کو تعبیر کرے تو پچھلی مثال کے عمل سے کونسے ہم متغیر اخذ ہوتے ہیں۔

(دیکھو امثلہ ۱، ۲ دفعہ ۱۶۹)۔

جواب :- (۱) $(\text{اج} - \text{ب}^2)\,\text{لا}^2 + (\text{اد} - \text{ب ج})\,\text{لا ما} + (\text{ب د} - \text{ج}^2)\,\text{ما}^2$،

(۲) $(\text{اج} - \text{ب}^2)\,\text{لا}^4 + 2\,(\text{اد} - \text{ب ج})\,\text{لا}^3\,\text{ما}$

$+ (\text{اس} + 2\,\text{ب د} - 3\,\text{ج}^2)\,\text{لا}^2\,\text{ما}^2$

$+ 2\,(\text{ب س} - \text{ج د})\,\text{لا ما}^3 + (\text{ج س} - \text{د}^2)\,\text{ما}^4$

۱۷۵ ـ مسئلہ ۳ ـ اگر لا، ما کے کثیر رقمی کا کوئی غیر متغیر

$$\text{ع} + \text{ک}\,(\text{لا ماَ} - \text{لاَ ما})^{\text{ن}}$$

بنایا جائے تو ک کی مختلف قوتوں کے سر جنکو متغیروں لاَ، ماَ کے متجانس تفاعلوں کے طور پر سمجھا گیا ہو ع کے ہم متغیر ہوتے ہیں۔

ع کو خطی استحالہ کے ذریعہ مستحیل کرو اور فرض کرو

(ا٠، ا١، ا٢، … ، ان)(لا، ما)ن = (اَ٠، اَ١، اَ٢، … ، اَن)(لاَ، ماَ)ن

نیز اگر لا، ما اور لاَ، ماَ ہم استحالہ متغیر ہوں تو

لا ماَ − لاَ ما = مہ (لاَ ماَ − لاَ ما)

اسلئے (ا٠، ا١، ا٢، … ، ان)(لا، ما)ن + ک (لا ماَ − لاَ ما)ن

کو مستحیل کرنے سے یہ ہو جاتا ہے (131)

(اَ٠، اَ١، اَ٢، … ، اَن)(لاَ، ماَ)ن + ک مہن (لاَ ماَ − لاَ ما)ن

اور ان دونوں شکلوں کا کوئی غیر متغیر فہ بنانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(فہ٠، فہ١، فہ٢، … ، فہق)(١، ک)ق

= مہک (فا٠، فا١، فا٢، … ، فاق)(١، مہن ک)ق

جس سے ثابت ہوتا ہے کہ

فہر = مہق فار

یعنے فہر ہم متغیر ہے۔

جب (لا ماَ − لاَ ما)ن کی بجائے (ب٠، ب١، ب٢، … ، بن)(لا، ما)ن

کو رکھا جاتا ہے تو ہمیں ذیل کا مسئلہ ملتا ہے جسکو اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔

اگر (ا٠، ا١، ا٢، … ، ان)(لا، ما)ن کا ایک **غیر متغیر**

فہ (ا٠، ا١، ا٢، … ، ان) ہو تو

فہ (ا٠ + ک ب٠، ا١ + ک ب١، … ، ان + ک بن)

ہیں ک کے تمام سر اِن دو کثیر رقمیوں

(اَ، اَ، اَ، ... اَن) (لا، ما)ن ، (بَ، بَ، بَ، ... بَن) (لا، ما)ن

کے نظام کے ہم متغیر ہوتے ہیں۔

اِس مسئلہ کو کئی متغیروں والے ایک ہی درجہ کے کثیر رقمیوں کی کسی تعداد کیلئے توسیع دیجا سکتی ہے۔ نیز اگر ۶ کی بجائے ف ویں درجہ کا ایک ہم متغیر و رکھا جائے تو ہم

و + ک (لا اَ - لاَ ما)ف

کا کوئی غیر متغیر بنا کر نئے ہم متغیر پیدا کر سکتے ہیں۔

۱۷۶۔ مسئلہ ۴۔ اگر فہ (لا، ما) اور پہ (لا، ما) ہم جنس کثیر رقمی ہوں تو مقطع

جف فہ / جف لا	جف فہ / جف ما
جف پہ / جف لا	جف پہ / جف ما

اِن کثیر رقمیوں کا ایک ہم متغیر ہے۔

(131) فہ اور پہ کو خطی استحالہ

لا = لہ لاَ + مہ ماَ ، ما = لَہ لاَ + مَہ ماَ

کے ذریعہ تبدیل کرو تو

فا (لاَ، ماَ) = فہ (لا، ما) ، پا (لاَ، ماَ) = پہ (لا، ما)

جن سے

جف فا / جف لاَ = لہ جف فہ / جف لا + لَہ جف فہ / جف ما ، جف پا / جف لاَ = لہ جف پہ / جف لا + لَہ جف پہ / جف ما ،

جف فا / جف ماَ = مہ جف فہ / جف لا + مَہ جف فہ / جف ما ، جف پا / جف ماَ = مہ جف پہ / جف لا + مَہ جف پہ / جف ما ،

اسلئے

$$\begin{vmatrix} \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} & \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} \\ \frac{\text{جف پا}}{\text{جف لا}} & \frac{\text{جف پا}}{\text{جف ما}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ل}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{لَ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} ، & \text{مہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{مَہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \\ \text{ل}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}} + \text{لَ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} ، & \text{مہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}} + \text{مَہ}\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} \end{vmatrix}$$

جو ذیل کی شکل میں تحویل ہو جاتا ہے

$$\text{م}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \frac{\text{جف پہ}}{\text{جف لا}} \right)$$

اور مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

اس ہم متغیر کو فہ اور پہ کا جیکوبین کہتے ہیں اور اسکو اکثر شکل جے (فہ، پہ) میں لکھتے ہیں۔ ن متغیروں والے ن تفاعلوں کا جیکوبین اسی قسم کی شکل کا ایک مقطع ہے اور اسکا ہم متغیر ہونا بالکل اسی طرح کے ثبوت سے دکھایا جا سکتا ہے۔

۱۷ء۱۔ تفرقی علامتوں کے ذریعہ غیر متغیروں اور ہم متغیروں کا اخذ کرنا۔ اگر ہم استحالہ متغیروں (مثلاً ن نقطوں کے محدد) کا ایک سلسلہ لا₁، ما₁؛ لا₂، ما₂؛ لا₃، ما₃؛ ...؛ لان، مان ہو تو تفاعیل (لا₁ ما₂ - لا₂ ما₁)، ...، (لاف مات - لاتماف) خطی استحالہ سے غیر متبدل رہتے ہیں۔ اور

چونکہ $\frac{\text{جف}}{\text{جف ماخ}}$ ، $-\frac{\text{جف}}{\text{جف لاخ}}$ اسی خطی استحالہ سے مستحیل ہوتے ہیں

جس سے کہ لاخ، ماخ (دیکھو دفعہ ۱۷ء۳) اس لئے ہم تفرق کی علامتوں کا ایک سلسلہ اخذ کرتے ہیں جنکو اوپر کی طرح ترکیب دینے سے حسب ذیل

علامتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_2}-\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_2}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1}\right)،\ldots،\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_\text{ق}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_\text{ف}}-\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_\text{ف}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_\text{ق}}\right)\text{، وغیرہ}$$

(133) ان علامتوں کو صرف (۱، ۲)، ....، (ف، ق)، وغیرہ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے اور انکی مدد سے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت اور مقابلہ کے لئے ایک مکمل علم احصاء حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً فہ، پہ کے جیکوبین کو شکل

$$(\text{۱، ۲})\ \text{فہ}_1\ \text{پہ}_2$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\text{فہ}_1=\text{فہ}\,(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)،\quad \text{پہ}_2=\text{پہ}\,(\text{لا}_2،\ \text{ما}_2)$$

اور لاحقوں کو عمل تفرق کی تکمیل کے بعد ترک کر دیا گیا ہے۔ اسی طرح علامتی شکل

$$(\text{۱، ۲})^2\ \text{فہ}_1\ \text{پہ}_2$$

کو پھیلا کر ہم متغیر

$$\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف لا}_1^2}\frac{\text{جف}^2\text{پہ}}{\text{جف ما}_2^2}-2\,\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف لا}_1\,\text{جف ما}_1}\frac{\text{جف}^2\text{پہ}}{\text{جف لا}_2\,\text{جف ما}_2}+\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف ما}_1^2}\frac{\text{جف}^2\text{پہ}}{\text{جف لا}_2^2}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ عمل تفرق کی تکمیل کے بعد متغیروں کے درمیان امتیاز باقی نہیں رہتا۔

ایک تنہا کثیر رقمی کے غیر متغیر اور ہم متغیر اس طریقہ سے تحقیق کرنے میں نتیجہ ذیل کی علامتی شکل میں حاصل ہوتا ہے:-

$$(\text{۱، ۲})^{\text{ع}}\,(\text{۲، ۳})^{\text{ب}}\,(\text{۳، ۴})^{\text{ج}}\ldots\ldots(\text{ف، ق})^{\text{ل}}\ \text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3\ldots\text{ع}_\text{ف}\,\text{ع}_\text{ق}$$

جہاں (مثلاً) ع_2 اس کثیر رقمی کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے جو

۶ میں لا اور ما کی بجائے لاز اور ماز درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
اگر اس عمل کی تکمیل کے بعد لا اور ما غائب ہو جائیں تو ہمیں ایک غیر متغیر حاصل ہوتا ہے اور اس صورت میں یہ دیکھنا آسان ہے کہ اعداد ۱، ۲، ۳، ... ف، ق سب کو ایسی رقموں میں جیسی کہ (خ، ز)^ن ہے ٹھیک ن مرتبہ واقع ہونا چاہئے۔ مثلاً ضابطہ

$$(۱،۲)^{ن}\ ۶_{۱}\ ۶_{۲}$$

سے تمام جفت کثیر رقموں کے لئے ثنائی غیر متغیروں کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور بالعموم غیر متغیر کا رتبہ اجزائے ضربی $۶_{۱}$، $۶_{۲}$ وغیرہ کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے۔ اسی طرح ضابطہ

$$(۲۱)^{م}\ (۳۲)^{م}\ (۱۳)^{م}\ ۶_{۱}\ ۶_{۲}\ ۶_{۳}$$

سے ہم درجہ ۲م کے کثیر رقمیوں کے لئے ثلاثی غیر متغیروں کا ایک سلسلہ اخذ کر سکتے ہیں۔ چار درجی کی صورت میں عمل $(۲۱)^{۲}(۳۲)^{۲}(۱۳)^{۲}$ سے غیر متغیر

$$ا_{۰}ا_{۲}ا_{۴} + ۲ا_{۱}ا_{۲}ا_{۳} - ا_{۰}ا_{۳}^{۲} - ا_{۴}ا_{۱}^{۲} - ا_{۲}^{۳}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ متغیروں کا یہ باہمی تبادلہ ایک تفرقی عامل (134)
کے ذریعہ سے پورا کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً

$$\left(لا_{ز}\frac{جف}{جف\ لا_{ز}} + ما_{ز}\frac{جف}{جف\ ما_{ز}}\right)۶_{ز} = ۱\times۲\times۳\times\ldots\times ن\ ۶_{ی}$$ وغیرہ وغیرہ

غیر متغیروں کو بنانے کا مصرحہ بالا طریقہ پروفیسر کیلے سے منسوب ہے۔
غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو محسوب کرنے کا مندرجہ بالا طریقہ آسانی کے ساتھ ثلاثی اشکال پر جاری کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ اگر لا، ما، ی، لا۱، ما۱، ی۱، لا۲ ما۲ ی۲ ہم استحالہ متغیر ہوں تو مقطعات کو ضرب

دینے کا جو قاعدہ ہے اُس سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہم $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ہے}_1}$ کو $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1}$ ، $\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}_1}$ کی رقوم میں بیان کریں اور دوسرے جزوی تفرقی سروں کے ساتھ بھی یہی عمل کریں تو تفرق کی علامتوں میں حسب ذیل رشتے ہوتے ہیں:-

$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ہے}_1}$
$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_2}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_2}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ہے}_2}$
$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_3}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_3}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ہے}_3}$

= م

$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_1}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_1}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}_1}$
$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_2}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_2}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}_2}$
$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}_3}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}_3}$	$\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}_3}$

= م (۳۲۱)

جہاں م استحالہ کا مقیاس ہے۔

۱۷۸ ۔ آرنہولڈ (Aronhold) اور کلبش (Clebsch) کی ترقیم

آرنہولڈ اور کلبش نے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو بنانے کا ایک طریقہ بہت کامیابی کے ساتھ استعمال کیا ہے۔ یہ طریقہ کیلی کے طریقہ کے ساتھ قریب کا تعلق رکھتا ہے۔ اسلئے یہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ انکی ترقیم کو واضح کیا جائے اور طریق عمل کے دونوں طریقوں کا ربط دکھایا جائے۔

آرنہولڈ ن ویں درجہ کے ثنائی کثیر رقمی کو رمزاً $\text{ا}_{\text{لا}}^{\text{ن}} \equiv (\text{ا}_1\text{لا}_1 + \text{ا}_2\text{لا}_2)^{\text{ن}}$ سے بیان کرتا ہے۔ حاصل ضرب $\text{ا}_1^{\text{ف}}\,\text{ا}_2^{\text{ق}}$ فوراً ع کے سروں سے بیان ہو سکتے ہیں جبکہ ف + ق = ن ۔ مثلاً

ع میں $لا_1^{ن}$ کا سر $ا_1^{ن}$ سے بیان ہوتا ہے، $لا_1^{ن-1} لا_2$ کا سر $ا_1^{ن-1} ا_2$ ہے (185)
اور علیٰ ہذا القیاس۔ لیکن جب حاصل ضرب میں قوتوں کا مجموعہ ف+ق، ن کا ضعف نہیں ہوتا تو کوئی تعبیر حاصل نہیں ہوتی۔

اب چونکہ

$$ع = (ا_1 لا_1 + ا_2 لا_2)^{ن} \qquad ع = \frac{1}{1\times 2\times 3\times \ldots \times ن}\left(لا_1 \frac{جف}{جف لا_1} + لا_2 \frac{جف}{جف لا_2}\right)^{ن} ع$$

اسلئے $ا_1$ اور $ا_2$ کے ن ویں درجہ کے کسی متجانس تفاعل میں ہم $ا_1$ اور $ا_2$ کی بجائے تفرقی علامتیں $\frac{جف}{جف لا_1}$ اور $\frac{جف}{جف لا_2}$ جو ع پر عمل کرتی ہیں رکھ سکتے ہیں۔ یہاں عددی جزو ضربی کا کوئی لحاظ نہیں رکھا گیا ہے۔

مزید براں ع میں متغیروں کے مختلف جوڑے درج کرنیکی بجائے اور اس طرح $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، ... بنانے کی بجائے (جیساکہ کیلی کے طریقہ میں کیا گیا ہے) آرنہولڈ کثیر رقمی ع کو مختلف اشکال $(ا_1 لا_1 + ا_2 لا_2)^{ن}$، $(ب_1 لا_1 + ب_2 لا_2)^{ن}$، $(ج_1 لا_1 + ج_2 لا_2)^{ن}$، ... میں لکھتا ہے جہاں $ا_1^{ف} ا_2^{ن-ف} = ب_1^{ف} ب_2^{ن-ف} = ج_1^{ف} ج_2^{ن-ف} = \ldots$

ع میں $لا_1^{ف} لا_2^{ن-ف}$ کا سر۔ کسی غیر متغیر یا ہم متغیر کے سروں کا رتبہ اس (غیر متغیر یا ہم متغیر) کے جملہ میں علامتوں ا، ب، ج، ... کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے۔ غیر متغیر کی ساخت میں تفرقی علامت $\left(\frac{جف}{جف لا_1}\frac{جف}{جف ا_2} - \frac{جف}{جف لا_2}\frac{جف}{جف ا_1}\right)$ جو کیلی کے طریقہ میں دی گئی ہے آرنہولڈ کی ترقیم میں اب اس علامت

(اب) ≡ (ا$_{1}$ ب$_{2}$ - ا$_{2}$ ب$_{1}$) سے بدلجاتی ہے۔

اس طرح، مثلاً، چار درجی کے غیر متغیر، آرنہولڈ کی ترقیم میں، یوں لکھے جاتے ہیں:۔

۲ ع = (ا ب)^{4} ، ۶ ج = (ب ج)^{2} (ج ا)^{2} (ا ب)^{2}

اور ہم متغیر جنکے صدر سر ھ اور گ ہیں یوں لکھے جاتے ہیں:۔

۲ ھ$_{\text{لا}}$ = (ا ب)^{2} ا$_{\text{لا}}^{2}$ ب$_{\text{لا}}^{2}$ ، گ$_{\text{لا}}$ = (ا ب)^{2} (ج ا) ا$_{\text{لا}}$ ب$_{\text{لا}}^{2}$ ج$_{\text{لا}}^{3}$

اِن جملوں کی تصدیق (ا ب) وغیرہ کی بجائے (ا$_{1}$ ب$_{2}$ - ا$_{2}$ ب$_{1}$) وغیرہ رکھنے اور پھر پھیلانے اور ع کے کسر داخل کرنے سے ہو سکتی ہے۔ یہ عمل کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ جملے حرفوں ا$_{1}$، ا$_{2}$ کے ہر جوڑے میں چوتھے درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔ یہ طریقہ کیلی کے طریقہ کی طرح ایسی کثیر رقمی ع پر استعمال کیا جا سکتا ہے جو متغیروں کی کسی تعداد پر مشتمل ہو۔

اب ہم اس باب کو چند مثالوں کے ساتھ جو مصرحہ صدر نظریہ (136)
کو واضح کرنیکے لئے منتخب کیگئی ہیں ختم کرتے ہیں۔ مزید معلومات کیلئے طالب علم کو حسب ذیل کتابوں کا حوالہ دیا جاتا ہے:۔

سامن، *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*

گارڈن، *Vorlesungen uber Invariantententheorie*

کلبش، *Theorie der binaren algebraischen Formen*

اس آخری کتاب میں علامتی طریقہ شروع سے آخر تک اختیار کیا گیا ہے۔

مثالیں

ا۔ کسی کثیر رقمی کا ممیز ایک غیر متغیر ہوتا ہے۔

۲۔ دو کثیر رقمیوں کا حاصل اسقاط اس نظام کا ایک غیر متغیر ہوتا ہے۔

۳ — دفعہ ۱۶۶ کی تعریفوں سے ثابت کرو کہ کثیر رقمی ع (لاَ اَ - لاَ اَ) کے تمام غیر متغیر، ع کے ہم متغیر ہیں جہاں متغیر لاَ : اَ ہے۔

اسکے ذریعہ سے کسی کے ہم متغیر چار درجی کے غیر متغیروں سے جو اصلوں کی رقوم میں بیان کئے گئے ہوں اخذ کرو۔

۴ — اگر کثیر رقمیوں

$$\frac{\text{فہ (لا)}}{\text{لا} - \text{عہ}_1}\ ,\ \frac{\text{فہ (لا)}}{\text{لا} - \text{عہ}_2}\ ,\ \frac{\text{فہ (لا)}}{\text{لا} - \text{عہ}_3}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\text{فہ (لا)}}{\text{لا} - \text{عہ}_n}$$

میں سے ہر ایک کیلئے ع$_1$، ع$_2$، ... ، ع$_n$ رتبہ ھ کا وہی غیر متغیر ہو جہاں عہ$_1$، عہ$_2$، عہ$_3$، ... ، عہ$_n$ مساوات فہ (لا) = ۰ کی اصلیں ہیں تو ثابت کرو کہ فہ (لا) کا ایک ہم متغیر

$$\sum_{ر=1}^{ر=n} \text{ع}_ر (\text{لا} - \text{عہ}_ر)^{ھ}$$

ہے۔

مثلاً اگر ج$_1$ سے اُس غیر متغیر ج کی تعبیر کی جائے جو چار اصلوں عہ$_2$، عہ$_3$، عہ$_4$، عہ$_5$ سے ترکیب پایا ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۷) اور اسی طرح کی قیمتیں سے ج$_2$، ج$_3$، ج$_4$، ج$_5$ کے لئے استعمال کی جائیں تو ہمیں پانچ درجی کا حسب ذیل ہم متغیر ملتا ہے :-

$$\text{ج}_1 (\text{لا} - \text{عہ}_1)^4 + \text{ج}_2 (\text{لا} - \text{عہ}_2)^4 + \text{ج}_3 (\text{لا} - \text{عہ}_3)^4 + \text{ج}_4 (\text{لا} - \text{عہ}_4)^4 + \text{ج}_5 (\text{لا} - \text{عہ}_5)^4$$

۵ — مساوات

$$(\text{ا}_0\text{، ا}_1\text{، ا}_2\text{، ... ، ا}_n)(\text{لا، ا})^n = 0$$

کی اصلیں عہ$_1$، عہ$_2$، ..... ، عہ$_n$ ہیں اور

$$\text{ا}_0^{n} \text{ فہ}_1 \text{ فہ}_2 \ldots \text{فہ}_m = \text{فا} (\text{ا}_0\text{، ا}_1\text{، ا}_2\text{، ... ، ا}_n)$$

(137)

جہاں فہ₁، فہ₂، ...، فہم چند یا سب اصلوں کے ایک منطق صحیح تفاعل کی قیمتیں ہیں جو اندراج سے حاصل ہوئی ہیں۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں ، $-\frac{\text{فہ}}{\text{مف فہ}}$ کی م قیمتیں ہیں۔ یہ دیا گیا ہے کہ مف² فہ = ۰ ، (دیکھو امثلہ ۱۲، ۱۳، ۱۴ صفحہ ۱۲۶ جلد اول)

جواب :- فا(ع₁، ع₂، ...، عن) = ۰

۶ — تین دو درجیوں کے درمیان متماثلہ رشتہ کو ان کے غیر متغیروں کی رقوم میں بیان کرو۔

فرض کرو

ع = ا₁ لا² + ۲ ب₁ لا ما + ج₁ ما² ،
و = ا₂ لا² + ۲ ب₂ لا ما + ج₂ ما² ،
ط = ا₃ لا² + ۲ ب₃ لا ما + ج₃ ما² ،

تو دو مقطعات

ا₁	ب₁	ج₁	۰
ا₂	ب₂	ج₂	۰
ا₃	ب₃	ج₃	۰
ما²	-لا ما	لا²	۰

ج₁	-۲ب₁	ا₁	۰
ج₂	-۲ب₂	ا₂	۰
ج₃	-۲ب₃	ا₃	۰
لا²	۲ لا ما	ما²	۰

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

۴

ع₁₁	ع₁₂	ع₁₃	ع
ع₂₁	ع₂₂	ع₂₃	و
ع₃₁	ع₃₂	ع₃₃	ط
ع	و	ط	۰

≡ ۰ ، جہاں ۲ عقف = اق جف + اف جق - ۲ بق بف ،

اس مقطع کو پھیلانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ع}_{۲۲}\text{ع}_{۳۳}-\text{ع}_{۳۲}^{۲})\text{ی}^{۲}+(\text{ع}_{۳۳}\text{ع}_{۱۱}-\text{ع}_{۱۳}^{۲})\text{و}^{۲}+(\text{ع}_{۱۱}\text{ع}_{۲۲}-\text{ع}_{۲۱}^{۲})\text{ط}^{۲}$$

$$+۲(\text{ع}_{۱۳}\text{ع}_{۲۱}-\text{ع}_{۱۱}\text{ع}_{۳۲})\text{و}\,\text{ط}+۲(\text{ع}_{۲۱}\text{ع}_{۳۲}-\text{ع}_{۲۲}\text{ع}_{۱۳})\text{ط}\,\text{ی}$$

$$+۲(\text{ع}_{۳۲}\text{ع}_{۱۳}-\text{ع}_{۳۳}\text{ع}_{۲۱})\text{ی}\,\text{و}\equiv ۰ \quad \ldots\ldots\ldots(۱)$$

اب دو صورتیں قابل توجہ ہیں :—

(۱) جب تینوں دو درجی باہم موسیقی ہوتے ہیں۔ اس صورت میں $\text{ع}_{۳۲}=۰$، $\text{ع}_{۱۳}=۰$، $\text{ع}_{۲۱}=۰$ اور متماثلہ مساوات شکل ذیل اختیار کرتی ہے :—

$$\left(\frac{\text{ی}}{\sqrt{\text{ع}_{۱۱}}}\right)^{۲}+\left(\frac{\text{و}}{\sqrt{\text{ع}_{۲۲}}}\right)^{۲}+\left(\frac{\text{ط}}{\sqrt{\text{ع}_{۳۳}}}\right)^{۲}\equiv ۰$$

(۲) جب ایک دو درجی $\text{ا}=۰$ سے اُن نقطوں کے دربیچ کے ماسکے متعین ہوتے ہیں جو دوسرے دو $\text{ی}=۰$ اور $\text{و}=۰$ سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس صورت میں $\text{ع}_{۳۱}=۰$ اور $\text{ع}_{۳۲}=۰$ اور عام مساوات (۱) میں یہ درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ع}_{۲۱}^{۲}-\text{ع}_{۱۱}\text{ع}_{۲۲})\text{ط}^{۲}=\text{ع}_{۳۳}(\text{ع}_{۲۲}\text{ی}^{۲}-۲\text{ع}_{۲۱}\text{ی}\,\text{و}+\text{ع}_{۱۱}\text{و}^{۲})$$

لیکن مساواتوں $\text{ع}_{۳۱}=۰$ اور $\text{ع}_{۳۲}=۰$ سے ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{ا}_{۳}=\text{ک}(\text{ا}_{۱}\text{ب}_{۲})،\ -۲\text{ب}_{۳}=\text{ک}(\text{ج}_{۱}\text{ا}_{۲})،\ \text{ج}_{۳}=\text{ک}(\text{ب}_{۱}\text{ج}_{۲})$$

اسلئے

$$۴(ا_۳ ج_۳ - ب_۳^۲) = ک^۲ \{۴(ا ب_۲)(ب ج_۲) - (ج ا_۲)^۲\}$$

یا

$$ع_{۳۳} = ک^۲ \{ع_{۱۱} ع_{۲۲} - ع_{۲۱}^۲\}$$

اور تحویل کرنے سے، جبکہ ک = ا یا ط ≡ ب(ع، و)، تو

$$\{ب(ع، و)\}^۲ = ع_{۲۲} ع^۲ - ۲ ع_{۲۱} ع و + ع_{۱۱} و^۲ .$$

(۷) ثابت کرو کہ چار درجی کا ایک ہم متغیر

$$\sum \nabla (ع_۲، ع_۳، ع_۴)(لا - ع_۱)^۴$$

ہے جہاں ع۱، ع۲، ع۳، .....، عر کے مربع دار فرقوں کے حاصل ضرب کو ∇(ع۱، ع۲، ....، عر) سے تعبیر کیا گیا ہے۔

(138) (۸) ثابت کرو کہ وہ شرط کہ ن ویں درجہ کی مساوات کی چار اصلیں ایک خطِ مستقیم پر نقطوں کا ایک موسیقی نظام متعین کریں $\frac{۱}{۲}$(ن − ۱) × (ن − ۲)(ن − ۳) ویں درجہ کے ایک غیر متغیر کو صفر کے مساوی رکھکر بیان کیجا سکتی ہے۔

(۹) اگر کثیر رقمی $(ا_۰، ا_۱، ....، ا_ن)(لا، ۱)^ن$ کا کوئی نیم غیر متغیر $ف(ا_۰، ا_۱، ا_۲، ....، ا_ن)$ ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{جف ف}{جف ا_ن}$ بھی ایک نیم غیر متغیر ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ کثیر رقمی $(ا_۰، ا_۱، ا_۲، ....، ا_ن)(لا، ۱)^ن$ کے نیم غیر متغیروں

$$ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲ ،\quad ا_۰ ا_۴ - ۴ ا_۱ ا_۳ + ۳ ا_۲^۲ ،\quad ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳$$

سے وہ ہم متغیر پیدا ہوتے ہیں جنکے درجے

۲ن − ۴، ۲ن − ۸، ۳ن − ۶

ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی کثیر رقمی کی اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کی مساوات میں ماقبل آخر رقم کے سر سے متغیروں میں چوتھے درجہ کا ایک ہم متغیر حاصل ہوتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک ہی کثیر رقمی کے دو ہم متغیروں کا حاصل ضرب اس شکل

$$\text{فہ پہ} + \text{لا}\,\text{عف}(\text{فہ پہ}) + \frac{\text{لا}^2}{1\times 2}\text{عف}^2(\text{فہ پہ}) + \dots$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں فہ اور پہ ہم متغیروں کے ماخذ ہیں۔

(دیکھو دفعہ ۱۴۹) مسٹر ایم۔ رابرٹس

۱۳۔ بالخصوص ثابت کرو کہ کثیر رقمی

$$(\text{ا}_0, \text{ا}_1, \text{ا}_2, \dots, \text{ا}_\text{ن})(\text{لا}, 1)^\text{ن}$$

کی م ویں قوت جملہ

$$\text{ا}_\text{ن}^\text{م} + \text{لا}\,\text{عف}(\text{ا}_\text{ن}^\text{م}) + \frac{\text{لا}^2}{1\times 2}\text{عف}^2(\text{ا}_\text{ن}^\text{م}) + \frac{\text{لا}^3}{1\times 2\times 3}\text{عف}^3(\text{ا}_\text{ن}^\text{م}) + \dots$$

سے تعبیر کیجا سکتی ہے۔

۱۴۔ ہم متغیر کی دونوں تعریفوں سے ثابت کرو کہ کسی ہم متغیر کا ہم متغیر اصلی کثیر رقمی یا کثیر رقمیوں کا ہم متغیر ہے۔

۱۵۔ اگر مساواتوں

$$\text{ع} \equiv (\text{ا}_0, \text{ا}_1, \text{ا}_2, \dots, \text{ا}_\text{م})(\text{لا}, 1)^\text{م} = 0, \quad \text{و} \equiv (\text{ب}_0, \text{ب}_1, \text{ب}_2, \dots, \text{ب}_\text{ن})(\text{لا}, 1)^\text{ن} = 0$$

کی اصلیں $\text{عہ}_1, \text{عہ}_2, \dots, \text{عہ}_\text{م}$ اور $\text{بہ}_1, \text{بہ}_2, \text{بہ}_3, \dots, \text{بہ}_\text{ن}$ ہوں تو نظام ع اور و کا ایک ہم متغیر، انکی اصلوں کے فرقوں کے سادہ ترین تفاعل سے یعنی

$$\Sigma(\text{عہ}_\text{ق} - \text{بہ}_\text{ق}) = \text{ن}\,\Sigma\,\text{عہ} - \text{م}\,\Sigma\,\text{بہ}$$

سے اخذ کرو۔

یہ سوال حل ہو جائیگا اگر ہم جملہ

$$\text{ع و}\sum\frac{\text{عف} - \text{بق}}{(\text{لا} - \text{عق})(\text{لا} - \text{بق})}$$

کو ع اور و کے سروں کی رقوم میں بیان کریں۔
اس مقصد کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\sum\frac{\text{عق} - \text{بق}}{(\text{لا} - \text{عق})(\text{لا} - \text{بق})} \equiv \sum\frac{\text{عہ}}{\text{لا} - \text{عہ}}\sum\frac{1}{\text{لا} - \text{بہ}} - \sum\frac{\text{بہ}}{\text{لا} - \text{بہ}}\sum\frac{1}{\text{لا} - \text{عہ}}$$

اور اگر ع اور و کو لا اور ما کے متجانس تفاعلوں کے طور پر لکھا جائے تو

$$\sum\frac{1}{\text{لا} - \text{عہ ما}} = \frac{\text{جفلوک ع}}{\text{جف لا}},\quad \sum\frac{\text{عہ}}{\text{لا} - \text{عہ ما}} = \frac{\text{جفلوک ع}}{\text{جف ما}},\ \text{وغیرہ}$$

اسلئے ان قیمتوں کو آخری مساوات میں لکھنے سے

(139)

$$\text{ع و}\sum\frac{\text{عق} - \text{بق}}{(\text{لا} - \text{عق ما})(\text{لا} - \text{بق ما})} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$$

جو ع اور و کا جیکوبین ہے۔ یہ بھی دیکھ لینا چاہئے کہ ج (ع، و) کا صدر سر م ن (ا ب۔ ا ب) ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ دو کثیر رقمیوں کے مشترک اجزائے ضربی انکے جیکوبین ج (ع، و) کے دوہرے اجزائے ضربی ہوتے ہیں جب کثیر رقمی ایک ہی درجہ ن کے ہوں۔

فرض کرو ع ≡ پ ق، و ≡ پ ر جہاں پ = ل لا + م ما۔ ان کثیر رقمیوں کا جیکوبین ج (ع، و) بناؤ تو معلوم ہوگا کہ اسکا ایک حصہ پ² سے تقسیم پذیر ہے اور دوسرا حصہ جو ظاہرا صرف پ سے تقسیم پذیر معلوم ہوتا ہے شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے (یولر کا متجانس تفاعلوں کا

مسئلہ استعمال کرنے اور عددی جزو ضربی کو ترک کرنے سے):—

$$\left(لا\,\frac{جف\,فہ}{جف\,لا} + ما\,\frac{جف\,فہ}{جف\,ما} \right) \left(ل\,\frac{جف\,پہ}{جف\,ما} - م\,\frac{جف\,پہ}{جف\,لا} \right) + \left(لا\,\frac{جف\,پہ}{جف\,لا} \right.$$

$$\left. + ما\,\frac{جف\,پہ}{جف\,ما} \right) \left(م\,\frac{جف\,فہ}{جف\,لا} - ل\,\frac{جف\,فہ}{جف\,ما} \right)$$

اور یہ ، (ل لا + م ما) بجے (فہ ، پہ) کے مماثل ہے۔

۱۷— ثابت کرو کہ لہ ع + مہ و کے ۲ (ن - ۱) دوہرے اجزائے ضربی جو لہ اور مہ کو بدلنے سے حاصل ہوتے ہیں بجے (ع ، و) کے اجزائے ضربی ہیں جہاں ع اور و دونوں ن ویں درجہ کے ہیں۔

۱۸— $ع = ۰ ، و = ۰ ، \frac{جف\,جے\,(ع ، و)}{جف\,لا} = ۰ ، \frac{جف\,جے\,(ع ، و)}{جف\,ما} = ۰$

کے درمیان بین تحلیلی طور پر ساقط کرنے سے دو کعبیوں ع اور و کا حاصل اسقاط معلوم کرو۔

۱۹— اگر

$$(\text{ا}_۰ ، \text{ا}_۱ ، \text{ا}_۲ ، \ldots ، \text{ا}_ن)(لا ، ما)^ن ،$$

$$(ب_۰ ، ب_۱ ، ب_۲ ، \ldots ، ب_ق)(لا ، ما)^ق ،$$

کے دو ہم متغیر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے جیکوبین کا پہلا سر

ن ق (ا۰ ب۱ - ا۱ ب۰)

ہے۔

۲۰— اگر

$$(\text{ا}_۰ ، \text{ا}_۱ ، \text{ا}_۲ ، \ldots ، \text{ا}_ف)(لا ، ما)^ف ،$$

$$(ب_۰ ، ب_۱ ، ب_۲ ، \ldots ، ب_ف)(لا ، ما)^ف ،$$

$$(ج_۰ ، ج_۱ ، ج_۲ ، \ldots ، ج_ف)(لا ، ما)^ف ،$$

۶ ن کے تین ہم متغیر ہوں تو ثابت کرو کہ مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_1 & \text{ا} \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_1 & \text{ب} \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_1 & \text{ج} \end{vmatrix}$$

ایک نیم غیر متغیر ہے۔

(140)

ستر ہواں باب

دو درجی، تین درجی اور چار درجی کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۱۷۹ ـــ دو درجی ـــ دو درجی کا صرف ایک غیر متغیر ہوتا ہے اور خود دو درجی کے علاوہ کوئی دوسرا ہم متغیر نہیں ہوتا ـــ

کیونکہ اگر دو درجی مساوات

$$\text{ع} \equiv \text{و}\ \text{لا}^{2} + 2\,\text{ب}\ \text{لا} + \text{ج} = 0$$

کی اصلیں عہ اور بہ ہوں تو انکے فرقوں کے تفاعل جن سے غیر متغیر اور ہم متغیر حاصل ہو سکتے ہیں صرف (عہ - بہ) کی جفت قوتیں ہیں جن کا نمونہ $(\text{عہ} - \text{بہ})^{2\text{ف}}$ ہے ـ (عہ - بہ) کی طاق قوتیں سروں کی رقوم میں منطق شکل میں بیان نہیں ہو سکتیں ـــ

اسلئے جملہ

$$\text{ع}^{2\text{ف}} . \left(\frac{1}{\text{عہ} - \text{لا}} - \frac{1}{\text{بہ} - \text{لا}} \right)^{2\text{ف}}$$

کو سروں کی رقوم میں بیان کر کے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دو درجی کا صرف ایک خاص غیر متغیر وج - ب² ہے اور خود ع سے جدا گانہ ہم متغیر موجود نہیں ہے ـــ

۱۸۰ – تین درجی اور اسکے ہم متغیر۔ دفعہ ہذا میں کعبی کے ہم متغیروں پر اُن اصولوں کے تحت بحث کیجائیگی جو قبل ازیں سمجھا دئے گئے ہیں اور دفعہ آئندہ میں غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی ٹھیک ٹھیک تعداد معلوم کیجائیگی۔

کعبی کی صورت میں ہم متغیر حاصل کرنیکا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ اصلوں کے فرقوں کے تفاعل میں

عہ، بہ، جہ کی بجائے بہ جہ + عہ لا، جہ عہ + بہ لا، عہ بہ + جہ لا درج کیا جائے۔ ایسا کرنے میں کسروں سے واسطہ نہ پڑیگا کیونکہ عہ - بہ کو مستحیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{\text{عہ} - \text{لا}} - \frac{۱}{\text{بہ} - \text{لا}} = \frac{-(\text{بہ جہ} + \text{عہ لا}) + (\text{جہ عہ} + \text{بہ لا})}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ})}$$

اور کسروں کو دور کرنے سے ہم اوپر کے استحالہ پر پہنچتے ہیں (فرقوں کے (142)
تفاعل ھ یا گ دونوں کے لئے رتبہ اور وزن مساوی ہیں)۔ فرقوں کے تفاعلوں کو مستحیل کرنیکا یہ طریقہ اب کعبی کے ہم متغیروں پر استعمال کیا جائیگا۔

(۱) دو درجی ہم متغیر یا ہیسوی ھ$_{\text{لا}}$ –

مساوات

$$\text{ا}_{۰}^{۲}(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{۲}\text{جہ})(\text{عہ} + \text{سہ}^{۲}\text{بہ} + \text{سہ جہ}) = ۹(\text{ا}_{۱}^{۲} - \text{ا}_{۰}\text{ا}_{۲})$$

کی دونوں جانبوں کو مستحیل کرنے سے

$$\text{ا}_{۰}^{۲}\{(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{۲}\text{جہ})\,\text{لا} + \text{بہ جہ} + \text{سہ جہ عہ} + \text{سہ}^{۲}\text{عہ بہ}\}$$

$$\times\{(\text{عہ} + \text{سہ}^{۲}\text{بہ} + \text{سہ جہ})\,\text{لا} + \text{بہ جہ} + \text{سہ}^{۲}\text{جہ عہ} + \text{سہ عہ بہ}\} = ۹(\text{ع}_{۲}^{۲} - \text{ع}_{۳}\text{ع}_{۱})$$

اس طرح ثابت ہوتا ہے کہ

$$\text{ھ}_{\text{لا}} \equiv (\text{ا}\,\text{ا}_{۲} - \text{ا}_{۱}^{۲})\,\text{لا}^{۲} + (\text{ا}\,\text{ا}_{۳} - \text{ا}_{۱}\text{ا}_{۲})\,\text{لا} + (\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۳} - \text{ا}_{۲}^{۲})$$

کے اجزائے ضربی

$$\text{ل لا} + \text{ل}_{۱} \quad \text{اور} \quad \text{م لا} + \text{م}_{۱} \qquad (\text{دفعہ ۵۹})$$

ہیں جہاں

$$\text{ل}_{۱} \equiv \text{بہ جہ} + \text{سہ جہ عہ} + \text{سہ}^{۲}\,\text{عہ بہ} ،\ \text{م}_{۱} \equiv \text{بہ جہ} + \text{سہ}^{۲}\,\text{جہ عہ} + \text{سہ عہ بہ}$$

سروں کی رقوم میں ھیسوی کی شکل سے یا دفعہ ۴۳ کے رشتوں سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب کعبی کامل مکعب ہوتا ہے تو ھیسوی کا ہر سر متماثلاً معدوم ہو جاتا ہے۔

(۲) کعبی ہم تغیر $\text{گ}_{\text{لا}}$۔

دفعہ ۵۹ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{ا}^{۳}\left\{(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{۲}\,\text{جہ})^{۳} + (\text{عہ} + \text{سہ}^{۲}\,\text{بہ} + \text{سہ جہ})^{۳}\right\}$$

$$= -۲۷\,(\text{ا}^{۲}\,\text{ا}_{۳} + ۲\,\text{ا}_{۱}^{۳} - ۳\,\text{ا}\,\text{ا}_{۱}\,\text{ا}_{۲})$$

اس مساوات کی دونوں جانبوں کو حسب سابق مستحیل کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ا}^{۳}\left\{(\text{ل لا} + \text{ل}_{۱})^{۳} + (\text{م لا} + \text{م}_{۱})^{۳}\right\} = -۲۷\,(\text{ع}^{۲}\,\text{ع}_{۳}$$

$$+ ۲\,\text{ع}_{۲}^{۳} - ۳\,\text{ع}_{۱}\,\text{ع}_{۲}\,\text{ع}) = ۲۷\,\text{گ}_{\text{لا}} ،$$

جہاں گ سے وہ ہم متغیر تعبیر ہوتا ہے جو فرقوں کے تفاعل گ سے اسطرح بنتا ہے کہ $\text{گ}_{\text{لا}}$ سے اخذ کردہ ماخذ پر دفعہ ۱۶۹ کی طرح عمل کیا جائے (علامت بدل دی گئی ہے تاکہ گ صدر سر ہو سکے)۔ ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں (دیکھو مثال ۳ دفعہ ۱۶۹)

$$\text{گ}_{\text{لا}} = (\text{ا}_{۰}^{۲}\,\text{ا}_{۳} - ۳\,\text{ا}_{۰}\,\text{ا}_{۱}\,\text{ا}_{۲} + ۲\,\text{ا}_{۱}^{۳})\,\text{لا}^{۳} + ۳\,(\text{ا}_{۰}\,\text{ا}_{۱}\,\text{ا}_{۳} + \text{ا}_{۱}^{۲}\,\text{ا}_{۲} - ۲\,\text{ا}_{۰}\,\text{ا}_{۲}^{۲})\,\text{لا}^{۲}$$

$$-(\text{ا}_{۳}^{۲}\,\text{ا}_{۰} - ۳\,\text{ا}_{۳}\,\text{ا}_{۲}\,\text{ا}_{۱} + ۲\,\text{ا}_{۲}^{۳}) - ۳\,(\text{ا}_{۳}\,\text{ا}_{۲}\,\text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۲}^{۲}\,\text{ا}_{۱} - ۲\,\text{ا}_{۳}\,\text{ا}_{۱}^{۲})\,\text{لا}،$$

$(\text{ل}\,\text{لا} + \text{ل}_{۱})^{۳} + (\text{م}\,\text{لا} + \text{م}_{۱})^{۳}$ کو تحلیل کرنے سے ہم $\text{گ}_{\text{لا}}$ کے اجزائے ضربی حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ اجزائے ضربی زیادہ آسانی کے ساتھ اس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں:۔ چونکہ گ کے اجزائے ضربی بہ + جہ − ۲عہ، جہ + عہ − ۲بہ، عہ + بہ − ۲جہ ہیں اسلئے $\text{گ}_{\text{لا}}$ کے اجزائے ضربی ہیں (142)

$$\frac{۱}{\text{بہ} - \text{لا}} + \frac{۱}{\text{جہ} - \text{لا}} - \frac{۲}{\text{عہ} - \text{لا}}،\quad \frac{۱}{\text{جہ} - \text{لا}} + \frac{۱}{\text{عہ} - \text{لا}} - \frac{۲}{\text{بہ} - \text{لا}}،\quad \frac{۱}{\text{عہ} - \text{لا}} + \frac{۱}{\text{بہ} - \text{لا}} - \frac{۲}{\text{جہ} - \text{لا}}$$

جبکہ کسریں دور کر دیجائیں۔

مساوات $\text{گ}_{\text{لا}} = ۰$ کی ہندسی تعبیر صریحاً حسب ذیل ملتی ہے:۔

اگر ایک خطِ مستقیم پر تین نقطے ا، ب، ج لئے جائیں جو مساوات ع = ۰ سے متعین ہوتے ہیں، اور تین نقطے اَ، بَ، جَ ایسے لئے جائیں کہ ا کا موسیقی مزدوج بلحاظ ب اور ج کے اَ ہے، ب کا بلحاظ ج اور ا کے بَ، ج کا بلحاظ ا اور ب کے جَ،

تو یہ تین نقطے ا، ب، ج مساوات $\text{گ}_{\text{لا}} = ۰$ سے متعین ہوتے ہیں۔ (دیکھو مثال ۱۳ صفحہ ۱۲۰ جلد اول)۔

(۳) کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کے طور پر بیان کرنا۔

ہیسوی کے اجزائے ضربی کے ذریعہ کعبی کو دو مکعبوں کے فرق میں حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے:۔

$$(\text{ل لا} + \text{ل}_{۱})^{۳} - (\text{م لا} + \text{م}_{۱})^{۳} = ۲۷\ ۶\ \frac{\sqrt{\Delta}}{\text{ا}^{۳}} ،$$

کیونکہ مثال ۶ صفحہ ۱۶۹ جلد اول کے مطابق

$$\text{ل}^{۳} - \text{م}^{۳} = \sqrt{-۲۷}\ (\text{بہ} - \text{جہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{بہ})$$

اس مساوات کو حسب سابق تحویل کرنے سے اسکی دائیں جانب ہو جاتی ہے

$$(\text{ل لا} + \text{ل}_{۱})^{۳} - (\text{م لا} + \text{م}_{۱})^{۳}$$

اور مساوات کی بائیں جانب ہو جاتی ہے

$$\sqrt{-۲۷}\ (\text{بہ} - \text{جہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ})$$

اور پچھلی مساواتوں سے اندراج کرنے سے

$$(\text{ل لا} + \text{ل}_{۱})^{۳} - (\text{م لا} + \text{م}_{۱})^{۳} = ۲۷\ \frac{۶}{\text{ا}^{۲}} \sqrt{\text{گ}^{۲} + ۴\text{ھ}^{۳}}$$

$$= ۲۷\ \frac{۶\sqrt{\Delta}}{\text{ا}^{۳}}$$

(۴) کعبی اور اسکے ہم متغیروں کے درمیان رشتہ۔

انمیں ذیل کا ربط موجود ہوتا ہے:۔

$$\text{گ}_{\text{لا}}^{۲} + ۴\,\text{ھ}_{\text{لا}}^{۳} = \Delta\,\text{ع}^{۲}$$

43) کیونکہ مثال ۶ صفحہ ۱۶۹ جلد اول سے

$$\text{ا}^{۴}(\text{ب} - \text{ج})^{۲}(\text{ج} - \text{ع})^{۲}(\text{ع} - \text{ب})^{۲} = -۲۷(\text{گ}^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳}) = -۲۷\,\text{ا}^{۲}\,\Delta$$

اور اس مساوات کو حسب سابق مستحیل کرنے سے

$$\text{ا}^{۶}(\text{ب} - \text{ج})^{۲}(\text{ج} - \text{ع})^{۲}(\text{ع} - \text{ب})^{۲}(\text{لا} - \text{ع})^{۲}(\text{لا} - \text{ب})^{۲}(\text{لا} - \text{ج})^{۲} = -۲۷(\text{گ}_{\text{لا}}^{۲} + ۴\,\text{ھ}_{\text{لا}}^{۳})$$

اسلئے

$$\Delta\,\text{ع}^{۲} = \text{گ}_{\text{لا}}^{۲} + ۴\,\text{ھ}_{\text{لا}}^{۳}$$

متماثل $\text{گ}^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳} = \text{ا}^{۲}\,\Delta$ میں $\text{ا}_{۰}$، $\text{ا}_{۱}$، وغیرہ کی بجائے $\text{ع}_{۰}$، $\text{ع}_{۱}$، وغیرہ درج کرنے سے بھی مندرجہ بالا نتیجہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔

(۵) کعبی کا حل۔

جملہ

$$(\text{ع}\sqrt{\Delta} + \text{گ}_{\text{لا}})^{\frac{۱}{۳}} + (\text{ع}\sqrt{\Delta} - \text{گ}_{\text{لا}})^{\frac{۱}{۳}}$$

ع کا ایک خطی جزو ضربی ہے۔

کیونکہ (۲) اور (۳) کے روابط سے

$$۲\,\text{ا}^{۳}(\text{ل}\,\text{لا} + \text{ل}_{۱})^{۳} = ۲۷(\text{ع}\sqrt{\Delta} + \text{گ}_{\text{لا}}),$$

$$-۲\,\text{ا}^{۳}(\text{م}\,\text{لا} + \text{م}_{۱})^{۳} = ۲۷(\text{ع}\sqrt{\Delta} - \text{گ}_{\text{لا}})$$

اور چونکہ ع کا ایک جزو ضربی

$$(\text{ل}\,\text{لا} + \text{ل}_{۱}) - (\text{م}\,\text{لا} + \text{م}_{۱})$$

ہے اسلئے مسئلہ ثابت ہے۔

کعبی کے حل کی یہ شکل پروفیسر کیلی نے حاصل کی تھی۔

۱۸۱ — **کعبی کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی تعداد**۔ چار درجی کی بحث شروع کرنے سے پیشتر ہم وہ مسئلہ لیتے ہیں جسکا حوالہ دفعہ ۱۶۲ میں دیا گیا تھا یعنے غیر تابع ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد کی تعیین۔ اس مقصد کے لئے کعبی کی صورت میں ہمیں حسب ذیل مسئلہ ملتا ہے:—

کعبی کے صرف دو ہم متغیر ہوتے ہیں جنکی صدر رقمیں ھ اور گ ہیں۔ اور صرف ایک غیر متغیر یعنے ممیز Δ جہاں

$$\text{ا}^2\,\Delta = \text{گ}^2 + ۴\,\text{ھ}^3 \text{ ، یا } \Delta = \text{ا}^2\text{د}^2 + ۴\,\text{ا ج}^3 - ۶\,\text{ا ب ج د} + ۴\,\text{د ب}^3 - ۳\,\text{ب}^2\text{ج}^2$$

اس کا ثبوت دفعہ ۱۶۲ کے مسئلہ سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ اصلوں کے فرقوں کا کوئی صحیح متشاکل تفاعل (ھ رتبہ کا) فہ (ع، ب، جہ) ہے جو سروں کے ذریعہ منطق شکل میں بیان ہو سکتا ہے۔ اس مسئلہ میں جسکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اہ فہ کی شکل

گ فا(ا، ھ، Δ)، یا فا(ا، ھ، Δ)

ہے بموجب اسکے کہ فہ، اصلوں کا طاق یا جفت تفاعل ہو۔ اسلئے پہلی صورت میں یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصلوں میں طاق درجہ کا غیر متغیر نہیں ہو سکتا کیونکہ گ فا(ا، ھ، Δ) وہی تفاعل نہیں رہتا جب، ا، ب، ج، د کو علی الترتیب د، ج، ب، ا میں بدلا جاتا ہے۔ دوسری صورت میں جفت درجہ کا غیر متغیر صرف ایک ہو گا جس کو Δ کی قوت ہونا چاہیئے، کیونکہ اگر فا(ا، ھ، Δ) میں Δ کے علاوہ ا یا ھ شامل ہوں تو یہ وہی تفاعل نہیں رہ سکتا جبکہ سروں کا باہمی تبادلہ اوپر کی طرح عمل میں آتا ہے۔ (144)

نیز کبھی صرف دو جداگانہ ہم متغیر رکھتا ہے کیونکہ یہ ثابت کر دیا گیا ہے کہ ہر نیم غیر متغیر $\text{ا}^{\text{ھ}}$ فہ کی شکل

$$\text{فا}(\text{ا}،\ \text{ھ}،\ \Delta)\ \text{یا}\ \text{گ}\ \text{فا}(\text{ا}،\ \text{ھ}،\ \Delta)$$

ہے اور اسلئے متناظر ہم متغیر جو نیم غیر متغیر کو صدر رقم قرار دیکر بنایا گیا ہو

$$\text{فا}(\text{ع}،\ \text{ھ}_{\text{لا}}،\ \Delta)\ \text{یا}\ \text{گ}_{\text{لا}}\ \text{فا}(\text{ع}،\ \text{ھ}_{\text{لا}}،\ \Delta)$$

کے طور پر بیان ہو سکنا چاہئے۔ یعنے ہر ہم متغیر $\text{ھ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{لا}}$ کی رقوم میں ع اور Δ کے ساتھ منطق صحیح شکل میں بیان ہو سکتا ہے یا دوسرے الفاظ میں صرف دو جداگانہ ہم متغیر ہیں۔

۱۸۲۔ چار درجی۔ اسکے ہم متغیر اور غیر متغیر۔ ہم یہ بتا چکے ہیں کہ چار درجی کے دو غیر متغیر ع اور جے ہیں (دفعہ ۱۶۷)۔ اصلی فرقوں کے تفاعلوں ھ اور گ سے ہم دو ہم متغیر $\text{ھ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{لا}}$ اخذ کر سکتے ہیں جنکے صدر سر ھ اور گ ہیں۔ کیونکہ ربط

$$\text{ا}_0^2 \sum (\text{عہ} - \text{بہ})^2 = -48(\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2)$$

سے دفعہ ۱۶۷ کے عمل کے ذریعہ ہم اخذ کرتے ہیں

$$\text{ا}_0^2 \sum (\text{عہ} - \text{بہ})^2(\text{لا} - \text{جہ})^2(\text{لا} - \text{ضہ})^2 = -48(\text{ع}\,\text{ع}_2 - \text{ع}_3^2)$$

اور $\text{ع}\,\text{ع}_2 - \text{ع}_3^2$ کو پھیلانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ھ}_{\text{لا}} = (\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2)\text{لا}^4 + 2(\text{ا}_0\text{ا}_3 - \text{ا}_1\text{ا}_2)\text{لا}^3 + (\text{ا}_0\text{ا}_4 + 2\text{ا}_1\text{ا}_3 - 3\text{ا}_2^2)\text{لا}^2 + 2(\text{ا}_1\text{ا}_4 - \text{ا}_2\text{ا}_3)\text{لا} + (\text{ا}_2\text{ا}_4 - \text{ا}_3^2)$$

اسی طرح چونکہ

$$گ \equiv ا_{۰}^{۲} ا_{۳} + ۲ ا_{۱}^{۳} - ۳ ا_{۰} ا_{۱} ا_{۲}$$

اسلئے ہم متغیر

$$- گ_{لا} \equiv ع_{۰}^{۲} ع_{۳} + ۲ ع_{۱}^{۳} - ۳ ع_{۰} ع_{۱} ع_{۲}$$ (145)

حاصل ہوتا ہے جو چھٹے درجہ میں تحویل ہو جاتا ہے، اور اگر اس کو اس طرح لکھا جائے

$$گ_{لا} \equiv ا'_{۰} لا^{۶} + ا'_{۱} لا^{۵} + ا'_{۲} لا^{۴} + ا'_{۳} لا^{۳} + ا'_{۴} لا^{۲} + ا'_{۵} لا + ا'_{۶}$$

تو اوپر کی قیمت کو پھیلانے سے یا، زیادہ آسانی کے ساتھ، ماخذ $ا'_{۰}$ بنانے سے اور دفعہ ۱۶۹ کے متواتر اعمال کی تکمیل کرنے سے سروں کی حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں :-

$ا'_{۶} = - ا_{۴}^{۲} ا_{۱} + ۳ ا_{۴} ا_{۳} ا_{۲} - ۲ ا_{۳}^{۳}$ ، $ا'_{۵} = - ا_{۴}^{۲} ا_{۰} - ۲ ا_{۴} ا_{۳} ا_{۱} - ۶ ا_{۳}^{۲} ا_{۲} + ۹ ا_{۴} ا_{۲}^{۲}$ ،

$ا'_{۴} = - ۵ ا_{۴} ا_{۳} ا_{۰} - ۱۰ ا_{۳}^{۲} ا_{۱} + ۱۵ ا_{۴} ا_{۲} ا_{۱}$ ، $ا'_{۳} = - ۱۰ ا_{۰} ا_{۳}^{۲} + ۱۰ ا_{۱}^{۲} ا_{۴}$ ،

$ا'_{۲} = ۵ ا_{۰} ا_{۱} ا_{۴} + ۱۰ ا_{۱}^{۲} ا_{۳} - ۱۵ ا_{۰} ا_{۲} ا_{۳}$ ، $ا'_{۱} = ا_{۰}^{۲} ا_{۴} + ۲ ا_{۰} ا_{۱} ا_{۳} + ۶ ا_{۱}^{۲} ا_{۲} - ۹ ا_{۰} ا_{۲}^{۲}$ ،

$ا'_{۰} = ا_{۰}^{۲} ا_{۳} - ۳ ا_{۰} ا_{۱} ا_{۲} + ۲ ا_{۱}^{۳}$ ،

یہاں یہ بات دیکھی جا سکتی ہے کہ جب، $ا'_{۳}$ معلوم ہو جاتا ہے تو $ا'_{۴}$، $ا'_{۵}$ اور $ا'_{۶}$ سے لاحقوں کو انکی متمم قیمتوں میں بدل کر اور پورے جملہ کی علامت دفعہ ۱۶۸ کے مطابق تبدیل کرکے $ا'_{۲}$، $ا'_{۱}$ اور $ا'_{۰}$ حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

اب ہم دفعات آئندہ میں چار درجی کے اِن دو ہم متغیروں کے اہم خواص پر بحث کرینگے۔*

۱۸۳۔ چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی

چونکہ $\text{گ}_{\text{لا}}$ کے دو درجی اجزائے ضربی ذیل کی بحث میں نمایاں حصہ لیتے ہیں اسلئے پہلے ہم اِن اجزائے ضربی کے لئے چار درجی کی اصلوں کی رقوم میں جملے معلوم کرتے ہیں اور انکے اہم خواص اخذ کرتے ہیں۔ عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں گ کے اجزائے ضربی چونکہ یہ ہیں

بہ + جہ - عہ - ضہ، جہ + عہ - بہ - ضہ، عہ + جہ - جہ - ضہ،

اسلئے اِن سے $\text{گ}_{\text{لا}}$ کے اجزائے ضربی، عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے علی الترتیب $\frac{1}{\text{لا} - \text{عہ}}$، $\frac{1}{\text{لا} - \text{بہ}}$، $\frac{1}{\text{لا} - \text{جہ}}$، $\frac{1}{\text{لا} - \text{ضہ}}$ درج کرکے اور کسروں کو دور کرنے کے لئے $\frac{\text{۶}}{\text{ا}}$ سے ہر جزو ضربی کو ضرب دیکر حاصل کئے جاتے ہیں۔

(146) پس اِن اجزائے ضربی کو ء، و، ط سے تعبیر کریں تو

$$\left.\begin{aligned} \text{ا ء} &= \text{۶}\left(\frac{1}{\text{لا} - \text{بہ}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{جہ}} - \frac{1}{\text{لا} - \text{عہ}} - \frac{1}{\text{لا} - \text{ضہ}}\right) \\ \text{ا و} &= \text{۶}\left(\frac{1}{\text{لا} - \text{جہ}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{عہ}} - \frac{1}{\text{لا} - \text{بہ}} - \frac{1}{\text{لا} - \text{ضہ}}\right) \\ \text{ا ط} &= \text{۶}\left(\frac{1}{\text{لا} - \text{عہ}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{بہ}} - \frac{1}{\text{لا} - \text{جہ}} - \frac{1}{\text{لا} - \text{ضہ}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

---

* دیکھو پروفیسر بال کا مضمون، کوارٹرلی جرنل آف میتھامیٹکس جلد ہفتم صفحہ ۳۶۸ میں۔ اس مضمون میں چار درجی کے مختلف حلوں پر کامل اور اہم بحث کیگئی ہے۔

اب اگر ع، و، ط کی قیمتوں کو لا کی قوتوں میں ترتیب دیا جائے تو

$$\left.\begin{aligned}
\text{ع} &= (\text{بہ}+\text{جہ}-\text{عہ}-\text{ضہ})\text{لا}^{2}-2(\text{بہ جہ}-\text{عہ ضہ})\text{لا}+\text{بہ جہ}(\text{عہ}+\text{ضہ})-\text{عہ ضہ}(\text{بہ}+\text{جہ})\\
\text{و} &= (\text{جہ}+\text{عہ}-\text{بہ}-\text{ضہ})\text{لا}^{2}-2(\text{جہ عہ}-\text{بہ ضہ})\text{لا}+\text{جہ عہ}(\text{بہ}+\text{ضہ})-\text{بہ ضہ}(\text{جہ}+\text{عہ})\\
\text{ط} &= (\text{عہ}+\text{بہ}-\text{جہ}-\text{ضہ})\text{لا}^{2}-2(\text{عہ بہ}-\text{جہ ضہ})\text{لا}+\text{عہ بہ}(\text{جہ}+\text{ضہ})-\text{جہ ضہ}(\text{عہ}+\text{بہ})
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

اور اس لئے

$$32\,\text{گ}_{\text{لا}} = \text{ا}^{3}\,\text{ع و ط}\,،$$

مساواتوں (۱) سے ہم آسانی کے ساتھ معلوم کرتے ہیں،

$$\text{و} = (\text{عہ}-\text{ضہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})-(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{ضہ})$$

$$\text{ط} = (\text{عہ}-\text{ضہ})(\text{لا}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})+(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{ضہ})$$

ان سے اور متشابہ مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$\frac{\text{و}^{2}-\text{ط}^{2}}{\text{مہ}-\text{نہ}} = \frac{\text{ط}^{2}-\text{ع}^{2}}{\text{نہ}-\text{لہ}} = \frac{\text{ع}^{2}-\text{و}^{2}}{\text{لہ}-\text{مہ}} = 4\,\frac{\text{ع}}{\text{ا}}\,، \qquad (3)$$

جہاں لہ، مہ، نہ کے وہی معمولی معنے ہیں (مثال ۷، دفعہ ۲۷)۔
اور اسلئے

$$(\text{مہ}-\text{نہ})\,\text{ع}^{2} = (\text{لہ}-\text{نہ})\,\text{و}^{2}-(\text{لہ}-\text{مہ})\,\text{ط}^{2}$$

پس $(\text{مہ}-\text{نہ})\,\text{ع}^{2} = \left(\text{و}\sqrt{\text{لہ}-\text{نہ}}+\text{ط}\sqrt{\text{لہ}-\text{مہ}}\right)\left(\text{و}\sqrt{\text{لہ}-\text{نہ}}-\text{ط}\sqrt{\text{لہ}-\text{مہ}}\right)$

اب جیساکہ اس متماثلہ مساوات سے ظاہر ہے چونکہ دوسری جانب کے اجزائے ضربی دونوں کامل مربع ہیں اس لئے ہم مان سکتے ہیں

$$\text{و}\sqrt{\text{لہ}-\text{نہ}}+\text{ط}\sqrt{\text{لہ}-\text{مہ}} \equiv 2\,\text{ع}_{1}^{2}\,،$$

$$\text{و}\sqrt{\text{لہ}-\text{نہ}}-\text{ط}\sqrt{\text{لہ}-\text{مہ}} \equiv 2\,\text{ع}_{2}^{2}\,،$$

اسلئے $\text{ط}\sqrt{\text{لہ}-\text{مہ}} = \text{ع}_{1}^{2}-\text{ع}_{2}^{2}$ (147)

$$و\ ۲\ \overline{ل - ن} = ع_۱^۲ + ع_۲^۲$$

$$ع\ ۲\ \overline{م - ن} = ۲\ ع_۱\ ع_۲$$

اِن قیمتوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $گ_ل$ کے دو درجی اجزائے ضربی ع، و، ط باہم موسیقی ہیں۔

مساوات $گ_ل = ۰$ کی ہندسی تعبیر کے لئے دفعہ ۶۵ دیکھو۔

۱۸۴۔ $گ_ل$ کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں

ھیسوی کو بیان کرنا۔ چونکہ

$$-۴۸\ \frac{ھ_ل}{ا_۱^۲} = \Sigma\ (ع - ب)^۲ (ل - ج)^۲ (ل - ض)^۲$$

اسلئے رقموں کو ازواج میں ملانے سے اور یہ دیکھنے سے کہ

$$\Sigma\ (ب - ج)(ع - ض)\ ع \equiv ۰،$$

$$\Sigma\ (ع - ب)^۲ (ل - ج)^۲ (ل - ض)^۲$$

$$= \Sigma \{ (ب - ج)(ل - ع)(ل - ض)$$

$$+ (ع - ض)(ل - ب)(ل - ج) \}^۲$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے (کیونکہ خطوط وحدانی کے اندر کی مقداریں ع، و، ط ہیں)

$$-۴۸\ \frac{ھ_ل}{ا_۱^۲} = ع^۲ + و^۲ + ط^۲$$

جو $ھ_ل$ کے لئے مطلوبہ ربط ہے۔

۱۸۵ ۔ خود چار درجی کو گ$_{\text{لا}}$ کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں بیان کرنا ۔ مساواتوں (۳) سے ع کے لئے ایک متشاکل قیمت حاصل کیجا سکتی ہے ۔ اِن مساواتوں میں اِ، مہ، تہ کی بجائے اِنکی قیمتیں، مساوات ۴ غہ^{۳} ـ ع غہ + ج$_{۳}$ = ۰ کی اصلوں غہ$_{۱}$، غہ$_{۲}$، غہ$_{۳}$ کی رقوم میں درج کرو تو

$$\text{ا}^{۲}(\text{و}^{۲}-\text{ط}^{۲}) = ۱۶(\text{غہ}_{۲}-\text{غہ}_{۳})\,\text{ع}،\quad \text{ا}^{۲}(\text{ط}^{۲}-\text{ع}^{۲}) = ۱۶(\text{غہ}_{۳}-\text{غہ}_{۱})\,\text{ع}،$$

$$\text{ا}^{۲}(\text{ع}^{۲}-\text{و}^{۲}) = ۱۶(\text{غہ}_{۱}-\text{غہ}_{۲})\,\text{ع}،$$

اِن مساواتوں سے ھ$_{\text{لا}}$ کی اُس قیمت کے ذریعہ جو دفعہ ماسبق میں درج ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ا ع})^{۲} = ۱۶(\text{غہ}_{۱}\,\text{ع} - \text{ھ}_{\text{لا}})،\quad (\text{ا و})^{۲} = ۱۶(\text{غہ}_{۲}\,\text{ع} - \text{ھ}_{\text{لا}})،$$

$$(\text{ا ط})^{۲} = ۱۶(\text{غہ}_{۳}\,\text{ع} - \text{ھ}_{\text{لا}})، \qquad (۴)$$

(148) اب ہم ابدالات

$$\text{ع}^{۲} \equiv \Delta_{۱}\,\text{لا}^{۲}،\quad \text{و}^{۲} \equiv \Delta_{۲}\,\text{ما}^{۲}،\quad \text{ط}^{۲} \equiv \Delta_{۳}\,\text{ے}^{۲}$$

عمل میں لاتے ہیں جہاں $\Delta_{۱}$، $\Delta_{۲}$، $\Delta_{۳}$ ممیزہیں ع، و، ط کے۔ اس طرح ع، و، ط کی بجائے تین دو درجی لا، ما، ے جنکے ممیز ایک کے مساوی ہیں داخل ہو جاتے ہیں ۔ اِس استحالہ کے ذریعہ دو درجیوں کی شکلیں بھی متعین ہو جاتی ہیں اور ان کے مربعوں کو ملانیوالا متماثل رشتہ (دیکھو مثال ۶ (۱) صفحہ ۲۱۰) اپنی سادہ ترین

شکل میں بیان ہو جاتا ہے ۔ ممیزوں کو محسوب کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

∆۱ = (بہ + جہ - عہ - ضہ) {بہ جہ (عہ + ضہ) - عہ ضہ (بہ + جہ)} - (بہ جہ - عہ ضہ)۲

اور متشابہ قیمتیں ∆۲ اور ∆۳ کے لئے ۔ اسلئے

∆۱ = - (لہ - مہ) (لہ - نہ)، ∆۲ = - (مہ - نہ) (مہ - لہ)، ∆۳ = - (نہ - لہ) (نہ - مہ)

اِن ابدالات کو عمل میں لانے سے پچھلی مساواتیں

(غہ۱ - غہ۲) (غہ۱ - غہ۳) لا۲ = ھلا - غہ۱ ع،

(غہ۲ - غہ۳) (غہ۲ - غہ۱) ما۲ = ھلا - غہ۲ ع، (۵)

(غہ۳ - غہ۱) (غہ۳ - غہ۲) ے۲ = ھلا - غہ۳ ع،

ہو جاتی ہیں ۔ اِن سے ھلا اور ع کی حسب ذیل قیمتیں اور لا، ما، ے کو ملانیوالا متماثل رشتہ آسانی کے ساتھ اخذ ہوتے ہیں:-

ھلا = غہ۱۲ لا۲ + غہ۲۲ ما۲ + غہ۳۲ ے۲،

- ع = غہ۱ لا۲ + غہ۲ ما۲ + غہ۳ ے۲، (۶)

≡ لا۲ + ما۲ + ے۲،

جہاں جیسا کہ ثابت کر دیا گیا ہے لا، ما، ے، تین باہم موسیقی دو درجی ہیں جنکے ممیز ہر صورت میں اکائی میں تحویل ہوتے ہیں۔ گلا کی قیمت، لا، ما، ے کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتی ہے:-

چونکہ ۳۲ گلا = ا۲ ع د ط اور

ع^2 و^2 ط^2 = (مہ - نہ)^2 (نہ - لہ)^2 (لہ - مہ)^2 لا^2 ما^2 ے^2

= $\frac{۲۵۶}{ا^{۶}}$ (ع^3 - ۲۷ جے^2) لا^2 ما^2 ے^2،

اسلئے گ$_{ا}$ = $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{ع}^3 - ۲۷\,\text{جے}^2}$ لا ما ے

۱۸۶ — چار درجی کی تحلیل — مساواتوں (149)

- ع = غہ$_1$ لا^2 + غہ$_2$ ما^2 + غہ$_3$ ے^2،

٠ = لا^2 + ما^2 + ے^2،

سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

ع = (غہ$_1$ - غہ$_2$) ما^2 + (غہ$_1$ - غہ$_3$) ے^2، ع = (غہ$_2$ - غہ$_3$) ے^2

+ (غہ$_2$ - غہ$_1$) لا^2، ع = (غہ$_3$ - غہ$_1$) لا^2 + (غہ$_3$ - غہ$_2$) ما^2

جہاں لا^2، ما^2، ے^2 کی قیمتیں مساواتوں (۵) سے متعین ہوتی ہیں ۔ ع کی اِن قیمتوں کو اِنکے اجزائے ضربی میں تحویل کرنے سے ہمیں ع کو تحلیل کرنے کے تین طریقے ملتے ہیں جو مساوات

۴ غہ^3 - ع غہ + جے = ٠

کے حل پر منحصر ہیں ۔

پروفیسر کیلی نے چار درجی کی تحلیل ایک متشاکل شکل میں پیش کی ہے جو ع اور ھ$_{ا}$ کے لئے دئے ہوئے جملوں سے آسانی کے ساتھ ماخوذ ہوسکتی ہے ۔ چونکہ بالعموم

ل(ا$_1$لا^2 + ۲ب$_1$ لاما + ج$_1$ ما^2) + م(ا$_2$لا^2 + ۲ب$_2$ لاما + ج$_2$ ما^2) + ن(ا$_3$لا^2 + ۲ب$_3$ لاما + ج$_3$ ما^2)

ایک کامل مربع ہوتا ہے جبکہ

Σ ل^{۲}(ا$_{۱}$ج$_{۱}$ - ب$_{۱}^{۲}$) + Σ م ن (ا$_{۲}$ج$_{۳}$ + ا$_{۳}$ج$_{۲}$ - ۲ب$_{۲}$ب$_{۳}$) = ۰

اسلئے

ل لا + م ما + ن سے

کامل مربع ہے جبکہ

ل^{۲} + م^{۲} + ن^{۲} = ۰

جہاں لا ، ما ، سے باہم موسیقی ہیں اور اِنکے ممیز ، ہر ایک ، اکائی میں تحویل ہوئے ہیں۔

اس لئے ع کی تحلیل ل ، م ، ن کی ایسی قیمتیں معلوم کرنے پر منحصر ہوتی ہے کہ عام دو درجی

ل لا + م ما + ن سے

یا ل √(غ$_{۲}$ - غ$_{۳}$) √(ه$_{لا}$ - غ$_{۱}$ ع) + م √(غ$_{۳}$ - غ$_{۱}$) √(ه$_{لا}$ - غ$_{۲}$ ع)

+ ن √(غ$_{۱}$ - غ$_{۲}$) √(ه$_{لا}$ - غ$_{۳}$ ع)

ایک کامل مربع ہو اور وہ معدوم ہو جبکہ ع معدوم ہو جائے۔ کسی اصل لا = عہ کے جواب میں یہ قیمتیں اس طور پر معلوم ہو سکتی ہیں کہ √(غ$_{۲}$ - غ$_{۳}$) ، √(غ$_{۳}$ - غ$_{۱}$) ، √(غ$_{۱}$ - غ$_{۲}$) کے لئے قیمتوں کا کوئی نظام لیا جائے اور کامل مربعوں ه$_{لا}$ - غ$_{۱}$ع ، ه$_{لا}$ - غ$_{۲}$ع ، ه$_{لا}$ - غ$_{۳}$ع کے جذروں کے لئے ایسی قیمتیں لی جائیں کہ ان میں سے ہر جذر کی لا = عہ کے لئے ایک ہی قیمت حاصل ہو۔ پھر لا ، ما ، سے کیلئے ذیل کی معین قیمتیں لی جائیں (150)

$$\text{لا} = \sqrt{\text{غ}_{۲} - \text{غ}_{۳}}\,\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{۱}\,\text{ع}} \Big/ \sqrt{\text{غ}_{۲} - \text{غ}_{۳}}\,\sqrt{\text{غ}_{۳} - \text{غ}_{۱}}\,\sqrt{\text{غ}_{۱} - \text{غ}_{۲}}$$

علیٰ ہذا القیاس ما اور ے کے لئے۔

پس ل، م، ن کو ذیل کی مساواتیں پوری کرنی چاہئیں:—

$$\text{ل}\sqrt{\text{غ}_{۲} - \text{غ}_{۳}} + \text{م}\sqrt{\text{غ}_{۳} - \text{غ}_{۱}} + \text{ن}\sqrt{\text{غ}_{۱} - \text{غ}_{۲}} = ۰ ،\ \text{ل}^{۲} + \text{م}^{۲} + \text{ن}^{۲} = ۰$$

اب یہ مساواتیں صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر

$$\frac{\text{ل}}{\sqrt{\text{غ}_{۲} - \text{غ}_{۳}}} = \frac{\text{م}}{\sqrt{\text{غ}_{۳} - \text{غ}_{۱}}} = \frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{غ}_{۱} - \text{غ}_{۲}}} ،$$

اسلئے آخر الامر ع کے چار خطی اجزائے ضربی کے مربع ہونے چاہئیں

$$(\text{غ}_{۲} - \text{غ}_{۳})\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{۱}\,\text{ع}} \pm (\text{غ}_{۳} - \text{غ}_{۱})\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{۲}\,\text{ع}} \pm (\text{غ}_{۱} - \text{غ}_{۲})\sqrt{\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}_{۳}\,\text{ع}}$$

جن کا حاصل ضرب $\Delta\,\text{ع}^{۲}$ ہے۔

اگر چار درجی $\text{ک}\,\text{ع} - \text{ل}\,\text{ھ}_{\text{لا}}$ کو حل کرنا مطلوب ہو تو اسی طرح ہم ل، م، ن کی ایسی قیمتیں منتخب کر سکتے ہیں کہ $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ے}$ کامل مربع ہو جائے اور اُسوقت معدوم ہو جبکہ $\text{ک}\,\text{ع} - \text{ل}\,\text{ھ}_{\text{لا}}$ معدوم ہو جائے۔ یہ قیمتیں اس طرح معلوم ہو سکتی ہیں کہ

$\sqrt{\text{غ}_{۲} - \text{غ}_{۳}}$ ، $\sqrt{\text{غ}_{۳} - \text{غ}_{۱}}$ ، $\sqrt{\text{غ}_{۱} - \text{غ}_{۲}}$ کے لئے قیمتوں کا ایک معین نظام لیا جائے اور

$$\text{ھ}_{\text{لا}} - \text{غ}\,\text{ع} = \frac{\text{ک} - \text{غ}\,\text{ل}}{\text{ک}} \left\{ \text{ھ}_{\text{لا}} - \text{مہ}\,(\text{ک}\,\text{ع} - \text{ل}\,\text{ھ}_{\text{لا}}) \right\}$$

لکھا جائے جہاں $مہ_{۱} = \frac{غہ_{۱}}{ک - لہ غہ_{۱}}$ مہ $ھ_{لا} - غہ_{۲}$ ع اور $ھ_{لا} - غہ$ ع

کے لئے متشابہ قیمتوں کے کامل مربعوں

$ھ_{لا} - مہ_{۱}(ک ع - لہ ھ_{لا})$، $ھ_{لا} - مہ_{۲}(ک ع - لہ ھ_{لا})$، $ھ_{لا} - مہ_{۳}(ک ع - لہ ھ_{لا})$

کے جذروں کے لئے ایسی قیمتیں انتخاب کیجائیں کہ وہ $ک ع - لہ ھ_{لا}$ کی ایک معین اصل عہ کے لئے مساوی ہوں، اور

$$لا = \frac{\sqrt{غہ_{۲} - غہ_{۳}}\sqrt{ک - لہ غہ_{۱}}\sqrt{ھ_{لا} - مہ_{۱}(ک ع - لہ ھ_{لا})}}{\sqrt{ک}\sqrt{غہ_{۲} - غہ_{۳}}\sqrt{غہ_{۳} - غہ_{۱}}\sqrt{غہ_{۱} - غہ_{۲}}}$$

رکھا جائے مع ما ئے کی متشابہ قیمتوں کے ۔۔۔ تب ل، م، ن کو ذیل کی مساواتیں پوری کرنی چاہئیں:-

$$ل^{۲} + م^{۲} + ن^{۲} = ۰،$$

$$ل\sqrt{(غہ_{۲} - غہ_{۳})(ک - غہ_{۱} لہ)} + م\sqrt{(غہ_{۳} - غہ_{۱})(ک - غہ_{۲} لہ)}$$
$$+ ن\sqrt{(غہ_{۱} - غہ_{۲})(ک - غہ_{۳} لہ)} = ۰$$

(151) یہ مساواتیں صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر

$$\frac{ل}{\sqrt{(غہ_{۲} - غہ_{۳})(ک - غہ_{۱} لہ)}} = \frac{م}{\sqrt{(غہ_{۳} - غہ_{۱})(ک - غہ_{۲} لہ)}} = \frac{ن}{\sqrt{(غہ_{۱} - غہ_{۲})(ک - غہ_{۳} لہ)}}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ک ع - ل ھ$_{\text{لا}}$ = ۰ کے ایک خطی جزو ضربی کا مربع ل لا + م ما + ن ے ہے۔

۱۸۷ - ک ع - ل ھ$_{\text{لا}}$ کے غیر متغیر اور ہم متغیر - دفعہ ۱۸۵ کی مساواتیں (٦) استعمال کر کے اور لا^{2} + ما^{2} + ے^{2} کو و سے تعبیر کر کے ہم ل ھ$_{\text{لا}}$ - ک ع میں - $\frac{\text{ل ع}}{6}$ و جمع کرنے سے اسکو شکل

$$\text{ر}_1 \text{لا}^2 + \text{ر}_2 \text{ما}^2 + \text{ر}_3 \text{ے}^2$$

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں ر$_1$ + ر$_2$ + ر$_3$ = ۰، جب وہ اس شکل میں تحویل ہو جائے تو ہمیں ر$_1$، ر$_2$، ر$_3$ کی حسب ذیل تحویل شدہ قیمتیں ملتی ہیں :-

$$3\text{ر}_1 = \text{ک}(2\text{غہ}_1 - \text{غہ}_2 - \text{غہ}_3) + \text{ل}(2\text{غہ}_2\text{غہ}_3 - \text{غہ}_3\text{غہ}_1 - \text{غہ}_1\text{غہ}_2),$$

$$3\text{ر}_2 = \text{ک}(2\text{غہ}_2 - \text{غہ}_3 - \text{غہ}_1) + \text{ل}(2\text{غہ}_3\text{غہ}_1 - \text{غہ}_1\text{غہ}_2 - \text{غہ}_2\text{غہ}_3),$$

$$3\text{ر}_3 = \text{ک}(2\text{غہ}_3 - \text{غہ}_1 - \text{غہ}_2) + \text{ل}(2\text{غہ}_1\text{غہ}_2 - \text{غہ}_2\text{غہ}_3 - \text{غہ}_3\text{غہ}_1),$$

شکلوں غہ$_1$ لا^2 + غہ$_2$ ما^2 + غہ$_3$ ے^2 اور ر$_1$ لا^2 + ر$_2$ ما^2 + ر$_3$ ے^2 کی متشابہت کی وجہ سے جو ایک ہی نمونہ کی ہیں یہ ظاہر ہے کہ لا ما ے بھی ک ع - ل ھ$_{\text{لا}}$ کے چھ درجی ہم متغیر کے اجزائے ضربی ہیں اور اسکا ہیسوی ر$_1$ لا^2 + ر$_2$ ما^2 + ر$_3$ ے^2 ہے۔ اس کی تصدیق ہم راست حساب لگا کر کر سکتے ہیں۔ اسلئے ہم ک ع - ل ھ$_{\text{لا}}$ کے غیر متغیر اور ہم متغیر اس طرح محسوب کرتے ہیں کہ ع کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کے جملوں میں

غ۱، غ۲، غ۳ کو ک۱، ک۲، ک۳ سے بدل دیتے ہیں۔

اب چونکہ

$$ع = \frac{۲}{۳}\{(غ_۲-غ_۳)^۲+(غ_۳-غ_۱)^۲+(غ_۱-غ_۲)^۲\}،$$

$$ج = -۴ غ_۱ غ_۲ غ_۳،$$

اور $ک_۲ - ک_۳ = (غ_۲ - غ_۳)(ک - ل غ_۱)$، $ک_۳ - ک_۱ = (غ_۳ - غ_۱)(ک - ل غ_۲)$،

$$ک_۱ - ک_۲ = (غ_۱ - غ_۲)(ک - ل غ_۳)،$$

2) اسلئے ک ع - ل ھ۱ کے غیر متغیروں کے لئے ہمیں حسب ذیل قیمتیں ملتی ہیں:—

$$ع_{(ک، ل)} = ع ک^۲ - ۳ ج ک ل + \frac{ع^۲}{۱۲} ل^۲،$$

$$ج_{(ک، ل)} = ج ک^۳ - \frac{ع^۲}{۶} ک^۲ ل + \frac{ع ج}{۴} ک ل^۲ - \frac{۵۴ ج^۲ - ع^۳}{۲۱۶} ل^۳$$

اگر ہم و کے ہم متغیر $ھ_{(ک، ل)}$ اور $گ_{(ک، ل)}$ بنائیں جہاں

$$۴ و \equiv ۴ ک^۳ - ع ک ل^۲ + ج ل^۳$$

(جو محول کعبی ہے جسکو ک، ل میں متجانس بنایا گیا ہے) تو ایم ہرمٹ (M.Hermite) کے بیان کی بموجب ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$ع_{(ک، ل)} = -۱۲ ھ_{(ک، ل)}، \quad ج_{(ک، ل)} = ۴ گ_{(ک، ل)}،$$

نیز ک ع - ل ھ۱ کا ھیسوی محسوب کرنے کے لئے ہم

$$ر_۱ لا^۲ + ر_۲ ما^۲ + ر_۳ ے^۲$$

کو ابدالات

$$غہ_۱^۳ لا^۲ + غہ_۲^۳ ما^۲ + غہ_۳^۳ ے^۲ = -\frac{۱}{۴} ع ع،$$

$$غہ_۱^۴ لا^۲ + غہ_۲^۴ ما^۲ + غہ_۳^۴ ے^۲ = \frac{۱}{۴} (ع ھ_{لا} + جے ع)،$$

کے ذریعہ تحویل کرتے ہیں۔ یہ متماثلہ مساواتیں، مساواتوں

$$غہ_۱^۲ = غہ_۲ غہ_۳ + \frac{۱}{۴} ع، \quad غہ_۲^۲ = غہ_۳ غہ_۱ + \frac{۱}{۴} ع، \quad غہ_۳^۲ = غہ_۱ غہ_۲ + \frac{۱}{۴} ع،$$

کو علی الترتیب پہلے $غہ_۱ لا^۲$، $غہ_۲ ما^۲$، $غہ_۳ ے^۲$ سے اور پھر $غہ_۱^۲ لا^۲$، $غہ_۲^۲ ما^۲$، $غہ_۳^۲ ے^۲$ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے حاصل ہوئی ہیں۔

اس طرح $ک ع - لہ ھ_{لا}$ کے ھیسوی کیلئے ہمیں حسب ذیل شکل ملتی ہے:-

$$\frac{۱}{۴} \left\{ ھ_{لا} (۴ک^۳ - \frac{۱}{۳} لہ^۳) - ع (\frac{۲}{۳} ع ک لہ - جے لہ^۲) \right\}$$

اس کو شکل

$$\frac{۱}{۳} \left(ھ_{لا} \frac{جف و}{جف ک} + ع \frac{جف و}{جف لہ} \right)$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے اور یہ $ک ع - لہ ھ_{لا}$ اور ھیسوی کے جیکوبین کا ایک ضعف ہے جبکہ متغیر ک اور لہ ہوں۔

نیز چونکہ

$$\text{ع}^3 - 27\,\text{ج}^2 = 16(\text{غ}_2 - \text{غ}_3)^2(\text{غ}_3 - \text{غ}_1)^2(\text{غ}_1 - \text{غ}_2)^2$$

اور $$\text{گ}_{\text{لا}} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{ع}^3 - 27\,\text{ج}^2} \times \text{لاماے}\text{،}$$

(153) اسلئے غ_1، غ_2، غ_3 کو ک_1، ک_2، ک_3 میں بدلنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ع}^3_{(\text{ک}،\text{ل})} - 27\,\text{ج}^2_{(\text{ک}،\text{ل})} = \text{و}^2(\text{ع}^3 - 27\,\text{ج}^2)\text{،}$$

$$\text{گ}_{(\text{ک}،\text{ل})\text{لا}} = \text{و}\,\text{گ}_{\text{لا}}$$

پس ہم نے ک ع۔ل $\text{ھ}_{\text{لا}}$ کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو ع کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں $\text{گ}_{\text{لا}}$ کی رقوم میں بیان کردیا۔

۱۸۸۔ چاردرجی کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد۔

اب ہم مسئلہ ذیل ثابت کرتے ہیں جو ان تفاعلوں کی تعداد معین کرتا ہے:

چاردرجی کے صرف دو جداگانہ غیر متغیر ع اور ج ہوتے ہیں اور صرف دو جداگانہ ہم متغیر جنکے صدر سر ھ اور گ ہیں۔

یہ مسئلہ اس بات کو بیان کرتا ہے کہ ہر غیر متغیر، ع اور ج کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے اور ہر ہم متغیر، ع، $\text{ھ}_{\text{لا}}$، $\text{گ}_{\text{لا}}$، ع، ج کا ایک منطق صحیح تفاعل۔ حسب ذیل بحث کی بنیاد دہ اصول ہیں جو

کعبی کی صورت میں استعمال کردہ اصولوں کے مشابہ ہیں۔ دفعہ ۱۶۳ کے مسئلہ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر اصلوں کے فرقوں کا کوئی صحیح تفاعل فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) ہو جو منطق شکل میں سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے تو اسے فہ (عہ، بہ، جہ، ضہ) کو شکل

گ فا (ا، ھ، ع، جے) یا فا (ا، ھ، ع، جے)

میں بیان کیا جا سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ طاق ہو یا جفت۔

اب اگر فا (ا، ھ، ع، جے) ایک غیر متغیر ہے تو ا اور ھ معدوم ہونے چاہئیں کیونکہ اگر وہ موجود ہوں تو یہ تفاعل وہی نہیں رہ سکتا جب سروں کو سیدھی یا الٹی ترتیب میں لکھا جاتا ہے۔ اسی طرح کسی طاق تفاعل سے جیسے گ فا (ا، ھ، ع، جے) غیر متغیر حاصل نہیں ہو سکتا پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر غیر متغیر ع اور جے کا تفاعل ہے۔

نیز چار درجی کے صرف دو جدا گانہ ہم متغیر ہوتے ہیں کیونکہ ہم نے یہ ثابت کر دیا ہے کہ فرقوں کا ہر تفاعل

فا (ا، ھ، ع، جے)، گ فا (ا، ھ، ع، جے)

میں سے کوئی ایک شکل اختیار کرتا ہے۔

اب اِن شکلوں کو ہم متغیروں کے صدر سروں کے طور پر لیکر یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ ہر ہم متغیر شکلوں

فا (ءَ، ھؔ، ع، جے)، گ فا (ءَ، ھؔ، ع، جے)

میں سے کسی ایک شکل میں بیان ہو سکتا ہے یعنے ہر ہم متغیر ھؔ، گؔ، ءَ، ع، جے کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔ (154)

پس مسئلہ بالا ثابت ہو چکا۔

مثالیں

۱ ــ اگر ع کوئی کعبی ہو اور $\text{گ}_{\text{لا}}$ اسکا کعبی ہم متغیر تو ثابت کرو کہ $\text{ل ع} + \text{مہ گ}_{\text{لا}}$ کے ھیسوی کی وہی اصلیں ہیں جو ع کے ھیسوی کی ہیں جہاں ل اور مہ مستقل ہیں۔

۲ ــ ثابت کرو کہ کثیر رقمی کا کوئی ہم متغیر مساوات

$$\sum \text{عہ}^{\text{ل}} \frac{\text{جف}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جف}\,\text{عہ}^{۲}} - \text{ھ}\,\text{س}_{۱}\,\text{فہ} = \text{لا}\,\frac{\text{جف}\,\text{فہ}}{\text{جف}\,\text{ما}}$$

کو پورا کرتا ہے جہاں کثیر رقمی کی اصلیں $\text{عہ}_{۱}$، $\text{عہ}_{۲}$، .... ، $\text{عہ}_{\text{ن}}$ ہیں، سروں میں فہ کا درجہ ھ ہے، اور $\text{س}_{۱} = \sum \text{عہ}$ ــ

۳ ــ اگر کثیر رقمی کا ایک جزو ضربی مربع ہو تو اسکے ھیسوی میں یہی مربع جزو ضربی داخل ہوتا ہے ــ

۴ ــ اگر چار درجی کا ایک جزو ضربی مربع ہو تو ثابت کرو کہ یہ جزو ضربی ہم متغیر $\text{گ}_{\text{لا}}$ میں پیچھرے جزو ضربی کے طور پر داخل ہوتا ہے۔ اس صورت میں ع، و، ط کی قیمتیں معلوم کرو۔ (دیکھو دفعہ ۱۴۶)

۵ ــ اگر $\text{فہ}(\text{لا})$ اور $\text{پہ}(\text{لا})$، ن ویں درجہ کے دو کثیر رقمی ہوں اور $\text{فہ}(\text{لا})$ کی اصلیں $\text{عہ}_{۱}$، $\text{عہ}_{۲}$، ... $\text{عہ}_{\text{ن}}$ ہوں تو بتاؤ کہ ان کا جیکوبین اس طرح بیان ہو سکتا ہے :ــ

$$\text{ج}(\text{فہ}،\text{پہ}) \equiv \text{ن}\,\text{فہ}^{۲} \sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{پہ}(\text{عہ}_{\text{ر}})}{\text{فہ}'(\text{عہ}_{\text{ر}})}\,\frac{۱}{(\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ر}})^{۲}}$$

اور بالخصوص ثابت کرو کہ چار درجی $\text{فہ}(\text{لا})$ کا چھہ درجی ہم متغیر $\text{گ}_{\text{لا}}$ شکل

$$\left\{ فہ(لا) \right\}^2 \sum \frac{فہ'(عہ)}{(لا-عہ)^2}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

۶۔ چار درجی ع کے لئے ثابت کرو کہ دو درجیوں

$$\frac{(لا-عہ)^2}{فہ'(عہ)}،\quad \frac{(لا-بہ)^2}{فہ'(بہ)}،\quad \frac{(لا-جہ)^2}{فہ'(جہ)}،\quad \frac{(لا-ضہ)^2}{فہ'(ضہ)}$$

میں سے کسی دو کا مجموعہ، ع کے چھ درجی ہم متغیر کا ایک جزو ضربی ہے جہاں اسکو اصلوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے۔

۷۔ اگر

$$فہ(لا) \equiv ا_. (لا-عہ_1)(لا-عہ_2)\ldots(لا-عہ_ن)$$

کا ممیز Δ ہو تو ثابت کرو کہ وہ مساوات جس کی اصلیں غیر منطق ہم متغیر

$$ی_ر = \frac{\sqrt{\Delta}}{فہ'(عہ_ر)} (لا-عہ_ر)^{ن-2}$$

کی ن قیمتیں ہیں فہ (لا) کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی رقوم میں ایک منطق شکل میں بیان ہو سکتی ہے جبکہ $\sqrt{\Delta}$ کو ملحق کیا جاتا ہے۔ بتاؤ کہ ی کی وہ قیمتیں جو علی الترتیب ن = ۳ اور ن = ۴ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں کعبی اور چار درجی کے اُن حلوں کے عددی اضعاف ہیں جنکو کیلی نے دریافت کیا ہے (دفعات ۱۸۰، ۱۸۶)۔

۸۔ دفعہ ۱۸۸ کے اصولوں کو استعمال کرکے چار درجی لہ ع + (155)
مہ $ھ_{لا}$ کے چھ درجی ہم متغیر کی شکل بغیر عمل حساب کے معلوم کرو۔

۹۔ چار درجی کے عیسوی کیلئے ھ، ع، گ، ج کی قیمتیں محسوب کرو۔

جواب:- $ھَ = \frac{2ا_. ج - ھ ع}{12}،\quad عَ = \frac{ع^2}{12}،\quad گَ = -\frac{ج گ}{4}$

$$ج = \frac{۵۴ ب ج^۲ - ع^۳}{۲۱۶}،$$

۱۰ — وہ دو شرطیں معلوم کرو کہ اُس چار درجی کا ہیسوی جس میں دوسری رقم موجود نہیں ہے ایک کامل مربع ہو اور ثابت کرو کہ دونوں شرطوں میں سے جے بطور جزو ضربی کے شامل ہوتا ہے۔

جواب:- جے گ = ۰، ا جے (۲ ھ ع - ۳ ا جے) = ۰

۱۱ — مساوات

$$(ا_۰، ا_۱، ا_۲، ... ، ا_ن)(لا، ۱)^ن = ۰$$

کا ایک نیم غیر متغیر جسکو لن کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے حسب ذیل ہے

$$ف = ا_ت + ت\, ا_{ت-۱}\, لن + \frac{ت(ت-۱)}{۱ \times ۲}\, ا_{ت-۲}\, لن^۲ + \cdots + ا_۰\, لن^ت$$

ثابت کرو کہ عف $ا_ر = ن\, ا_{ن-۱}\, ر\, ا_{ر-۱}$ اور اسلئے بتاؤ کہ اگر یہ $(ا_۰، ا_۱، ... ، ا_ر)$ ایک نیم غیر متغیر ہے تو یہ $(ا_۰، ا_۱، ... ، ا_ر)$ بھی نیم غیر متغیر ہے۔

۱۲ — پچھلے سوال کے نتیجہ کی مدد سے یہ بتاؤ کہ کسی مساوات کیلئے مربع دار فرقوں کی مساوات کا آخری سر کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے جبکہ یہ سر اُس مساوات کے لئے معلوم ہو جائے جو عین نچلے رتبہ کی ہے۔

۱۳ — اگر ع ن کے دو نیم غیر متغیر جنکو لن کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے حسب ذیل ہوں

$$ف(لن) \equiv (ا_۰، ا_۱، ا_۲، ... ، ا_ت)(لن، ۱)^ت،$$

$$پ(لن) \equiv (ب_۰، ب_۱، ب_۲، ... ، ب_ق)(لن، ۱)^ق،$$

تو ثابت کرو کہ نظام فہ (لا) اور پہ (لا) کا کوئی نیم غیر متغیر، $ع_{ن-۱}$ کا نیم غیر متغیر ہے۔

۱۴۔ اگر $ع_ن \equiv (ا_۰، ا_۱، ا_۲، ... ا_ن)(لا، ما)^ن$ کے دو غیر متغیر

$$ع_۱ \equiv (ا_۰، ا_۱، ا_۲، ... ا_ف)(لا، ۱)^ف ،$$

$$ع_۲ \equiv (ب_۰، ب_۱، ب_۲، ... ب_ق)(لا، ۱)^ق ،$$

ہوں تو ثابت کرو کہ $ع_۱$ اور $ع_۲$ کا حاصل استقاط جبکہ لا کو ساقط کیا جاتا ہے $ع_{ن-۱}$ کے ایک ہم متغیر کا فائق عنصر ہے جسکا درجہ متغیروں میں حسب ذیل ہے

$$(ن+۱) ف ق - ف \pi_۲ - ق \pi_۱$$

جہاں $\pi_۱$ اور $\pi_۲$ رتبے ہیں $ع_۱$ اور $ع_۲$ کے۔

۱۵۔ اگر چار درجی کے ممیز کو شکل

$$(ا_۱، ا_۲، ا_۳)(ا_۴، ۱)^۳$$

میں لکھا جائے تو ثابت کرو کہ اس کعبی کا ممیز ہے

$$۲۷ گ^۲ \Delta_۲^۳$$

جہاں $(ا_۰، ا_۱، ا_۲، ا_۳)(لا، ۱)^۳$ کا ممیز $\Delta_۲$ ہے۔ $ا_۳$ معلوم ہو جانے کے بعد $ا_۲$، $ا_۱$ اور $ا_۰$ معلوم کرو۔

۱۶۔ وہ مساواتیں بناؤ جنکی اصلیں (156)

$$فہ(عم_۱)، فہ(عم_۲)، ... فہ(عم_ن)$$

ہوں جہاں $ع_1$، $ع_2$، ....، $ع_ن$ اصلیں ہیں ف (لا) = ۰ کی اور ف (لا) اور فہ (لا) کا حاصل ر دیا گیا ہے۔

فہ (لا) کے آخری سر $ب_م$ کو $ب_م$ - غہ میں بدلو اور $ب_م$ کی بجائے یہ قیمت مساوات ر = ۰ میں درج کرو۔

۱۷۔ اگر فہ (لا) ≡ ($ا_۰$، $ا_1$، $ا_2$، ....، $ا_ن$) $(لا، ما)^ن$ کی اصلیں $ع_1$، $ع_2$، ....، $ع_ن$ ہوں اور اگر فہ (لا) کا ایک ہم متغیر

پہ (لا) ≡ $ا_۰$ (لا - $بہ_1$) (لا - $بہ_2$) ..... (لا - $بہ_{ن-۲}$)

ہو جسکا درجہ (ن - ۲) ہے تو ثابت کرو کہ مقداروں

$$\frac{پہ(ع_1)}{فہ'(ع_1)}، \frac{پہ(ع_2)}{فہ'(ع_2)}، ....، \frac{پہ(ع_ن)}{فہ'(ع_ن)}$$

کا کوئی متشاکل تفاعل غیر متغیروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے (ہرسٹ) فہ (لا) اور لہ فہ' (لا) + پہ (لا) کے حاصل کو فہ (لا) کی اصلوں کی رقوم میں بیان کرو اور اسکو ر سے تعبیر کرو تو یہ مسئلہ صرف یہ دکھانے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ لہ کی وہ قیمتیں جو مساوات ر = ۰ سے ملتی ہیں نہیں بدلتیں (سوائے علامت میں) جبکہ اصلوں عہ اور اصلوں بہ کی بجائے اِنکے منکافی لکھے جاتے ہیں۔ اصلوں عہ کے منکافی لینے میں یہ بات شامل ہے کہ $ا_ر$ کی بجائے $ا_{ن-ر}$ درج ہو اور پہ (لا) کی اصلوں بہ کا بھی منکافی لیا جائے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ اگر $ع_2$ اور $ھ_{لا}$ کو دفعہ ۱۸۳ کے $ع_1$ اور $ع_2$ کی

رقوم میں بیان کیا جائے تو دونوں اس شکل

(ا، ب، ا) (ع$^{۲}_{۱}$، ع$^{۲}_{۲}$)^{۲}

کے ہیں۔

۱۹ – ثابت کرو کہ چار درجی

ف (لا، ما) ≡ (ا، ب، ج، د، ص) (لا، ما)^{۴}

ایک خطی استحالہ لا = لہ لا + مہ ما، ما = لہَ لا + مہَ ما کے ذریعہ شکل

ف (لہ، لہَ) لا^{۴} + ف (مہ، مہَ) ما^{۴} + ۶ غہ مہ^{۲} لا^{۲} ما^{۲}

میں تحویل ہو سکتا ہے جہاں

۴ غہ^{۳} – ع غہ + ج = ۰، مہ ≡ لہ مہَ – لہَ مہ،

(سلوسٹر)

۲۰ – پچھلی مثال کی ترقیم کو قائم رکھ کر ثابت کرو کہ چار درجی کے چھ درجی ہم متغیر کے اجزائے ضربی ع، و، ط میں سے ایک کی اصلیں

لہ/لہَ اور مہ/مہَ ہیں۔ (دفعہ ۱۸۳)

۲۱ – ثابت کرو کہ

ف^{۲} گ لا / ف لا^{۳} = ۶۰ (ع$^{۲}_{۱}$ ع$_{۲}$ – ع$_{۰}$ ع$^{۱}_{۳}$)

یہ دفعہ ۶۵ کا محول کعبی ہے (دیکھو مثال ۵ صفحہ ۱۹۵ جلد اول)

۲۲ – ثابت کرو کہ

غہ$^{پ}_{۱}$ لا^{۲} + غہ$^{پ}_{۲}$ ما^{۲} + غہ$^{پ}_{۳}$ ے^{۲} = Π$_{پ-۲}$ ھ$_{لا}$ – Π$_{پ-۱}$ ع،

جہاں Π$_{پ-۱}$ اور Π$_{پ-۲}$ متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں۔

۲۳ ــ ثابت کرو کہ

$$(۲۷\,جـ^{۲} - ع^{۳})\,(ما ـے^{۲} + ـے^{۲}\,لا^{۲} + لا\,ما^{۲})$$

$$\equiv ع^{۲} ع_{۱}^{۲} - ۳۶\,جـ\,ع\,ھـ_{۱} + ۱۲\,ھـ_{۱}^{۲}\,ع$$

جہاں اس متماثلہ کی دوسری جانب $گ_{۱}$ کا ضبسوی ہے۔

۲۴ ــ اگر $ع \equiv ظہ^{۴} + یہ^{۴} + ۶\,م\,ظہ^{۲}\,یہ^{۲}$

جہاں $ظہ = لہ\,لا + مہ\,ما$، $یہ = لَہ\,لا + مَہ\,ما$، $مہ = لہ\,مَہ - لَہ\,مہ$

تو ثابت کرو کہ $ع \equiv مہ^{۴}(۱ + ۳\,م^{۲})$، $جـ \equiv مہ^{۶}(م - م^{۳})$،

$$مہ^{۲} \equiv \frac{جـ}{ع}\,\frac{۱+۳\,م^{۲}}{م - م^{۳}}، \quad ۴(مہ^{۲}م)^{۳} - ع\,(مہ^{۲}م) + جـ = ۰،$$

$$ھـ_{۱} \equiv مہ^{۲}\{م(ظہ^{۴} + یہ^{۴}) + (۱ - ۳\,م^{۲})\,ظہ^{۲}\,یہ^{۲}\}،$$

$$گ_{۱} \equiv مہ^{۳}(۱ - ۹\,م^{۲})\,ظہ\,یہ\,(ظہ^{۴} - یہ^{۴})$$

۲۵ ــ بتاؤ کہ (۱) مثال ۱۹ کے استحالہ کو عمل میں لانے کے دو حقیقی اور الگ الگ طریقے ہیں جبکہ چار درجی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا خیالی، اور (۲) صرف ایک حقیقی طریقہ ہے جبکہ دو اصلیں حقیقی اور دو خیالی ہوں۔

دفعہ ۱۸۵ کے $ھ$، $ھ_{۱}$، $ھ_{۲}$ کی قیمتیں محسوب کرو اور اس پر غور کرو کہ پہلی صورت میں محول کعبی کی تین اصلیں حقیقی ہیں اور دوسری صورت میں ایک حقیقی اور دو خیالی۔

(158)

اٹھارواں باب

مجتمع شکلوں کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۱۸۹- مجتمع شکلیں۔ اس باب میں ہم دو یا زیادہ کثیر رقمیوں کے نظاموں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے نظریہ کی وضاحت سادہ ترین صورتوں یعنی (۱) دو دو درجیوں، (۲) دو درجی اور کعبی، (۳) دو کعبیوں کے ذریعہ کرینگے۔ ہر صورت میں اُن شکلوں کا شمار کیا جائیگا جنکا بنیادی اہمیت رکھنا کلبش (Clebsch) گارڈن (Gordan) اور سلوسٹر (Sylvester) نے ثابت کیا ہے۔ ہم یہ بتائینگے کہ یہ شکلیں کس طرح حاصل کیجا سکتی ہیں لیکن اس بات کی کوشش نہیں کرینگے کہ ان سے تمام دوسری شکلیں جو ان پر منحصر ہیں کسطرح تحویل کیجا سکتی ہیں۔ مجتمع نظام کے ہم متغیروں، غیر متغیروں کی تعداد کی تخمین میں وہ غیر تابع اشکال جو ہر کثیر رقمی سے تعلق رکھتی ہیں (یعنی ہر کثیر رقمی کے اپنے غیر متغیر اور ہم متغیر) اس کل تعداد میں شامل کیجاتی ہیں جو نظام سے متعلق ہے۔ یہ سہولت بخش ہوگا کہ ہم اصطلاح "خاص" ان شکلوں کے موسوم کرنیکے لئے استعمال کریں جو دو کثیر رقمیوں سے (جنکو ایک نظام سمجھا گیا ہے) متعلق ہیں تاکہ اُن شکلوں سے تمیز ہو سکے جو علیحدہ لئے ہوئے کثیر رقمیوں سے تعلق رکھتی ہیں۔

غیر متغیروں اور ہم متغیروں دونوں کا ایک نام "ہم رو" ہو سکتا ہے

یہ نام کسی ایسے تفاعل کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے جس کے رشتے کثیر رقمیوں کے ساتھ خطی استحالہ پر منحصر نہیں ہوتے ۔

۱۹۰ ۔ دو دو درجی ۔ فرض کرو کہ دو دو درجی یہ ہیں

ع ≡ ا$_1$ لا^2 + ۲ ب$_1$ لا ما + ج$_1$ ما^2 ، و ≡ ا$_2$ لا^2 + ب$_2$ لا ما + ج$_2$ ما^2 ،

اس نظام کا ایک خاص غیر متغیر ہے اور ایک خاص ہم متغیر ۔ ل ع + م و کا ممیز بنانے سے یہ غیر متغیر حاصل ہو سکتا ہے ۔ چنانچہ اس جملہ کا ممیز ہے

ل^2(ا$_1$ ج$_1$ - ب$_1^2$) + ل م (ا$_1$ ج$_2$ + ا$_2$ ج$_1$ - ۲ ب$_1$ ب$_2$) + م^2(ا$_2$ ج$_2$ - ب$_2^2$)

159) جس میں ل : م کے تمام سر غیر متغیر ہیں (دفعہ ۱۷۵) ۔ اسلئے خاص غیر متغیر حاصل ہوتا ہے

ا$_1$ ج$_2$ + ا$_2$ ج$_1$ - ۲ ب$_1$ ب$_2$ ≡ ۲ ع$_{12}$ ، (مثال ۳ دفعہ ۱۷۱)

سروں کے اس تفاعل کا معدوم ہونا اس بات کی شرط ہے کہ خطوط ع و = ۰ کا پنسل موسیقی ہو گا ، ایک مساوات سے تعبیر ہونیوالی شعاعیں دوسری مساوات سے تعبیر ہونیوالی شعاعوں کی مزدوج ہیں ۔

خاص ہم متغیر دئے ہوئے نظام کا جیکوبین ہے جسکو ہم لکھ سکتے ہیں

ج(ع، و) ≡

ا$_1$ لا + ب$_1$ ما	ب$_1$ لا + ج$_1$ ما
ا$_2$ لا + ب$_2$ ما	ب$_2$ لا + ج$_2$ ما

اِسکو اِس شکل

لا^2	-لا ما	ما^2
ا$_1$	ب$_1$	ج$_1$
ا$_2$	ب$_2$	ج$_2$

میں لکھا جا سکتا ہے جو کثیر رقمیوں ع، و، (لا مآ - لآ ما)^۲ سے متغیروں کو باہم تحلیلی طور پر ساقط کرنے سے حاصل ہوا ہے۔ شکل لا مآ - لآ ما تمام ثنائی کثیر رقمیوں کا کلی ہم رو ہے (دفعہ ۱۷۵)۔ لہ اور مہ کو ان مساواتوں سے جو متماثلہ لہ ع + مہ و ≡ (لا مآ - لآ ما)^۲ میں سروں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتی ہیں ساقط کرنے سے بھی جے (ع، و) کی یہ شکل حاصل ہو سکتی ہے۔

جے کا مربع، ع اور و کے ساتھ حسب ذیل اہم رشتہ رکھتا ہے:

$$-\text{جے}^{2}(\text{ع},\text{و}) = \text{ع}_{22}\,\text{ع}^{2} - 2\,\text{ع}_{12}\,\text{ع}\,\text{و} + \text{ع}_{11}\,\text{و}^{2} \quad (1)$$

اسکو اس مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{ما}^{2} & -\text{لا ما} & \text{لا}^{2} \\ \text{لہ}_{1} & \text{بہ}_{1} & \text{جہ}_{1} \\ \text{لہ}_{2} & \text{بہ}_{2} & \text{جہ}_{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{لا}^{2} & 2\,\text{لا ما} & \text{ما}^{2} \\ \text{جہ}_{1} & -2\,\text{بہ}_{1} & \text{لہ}_{1} \\ \text{جہ}_{2} & -2\,\text{بہ}_{2} & \text{لہ}_{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \text{ع} & \text{و} \\ \text{ع} & 2\,\text{ع}_{11} & 2\,\text{ع}_{12} \\ \text{و} & 2\,\text{ع}_{12} & 2\,\text{ع}_{22} \end{vmatrix}$$

سے فوراً اخذ کیا جا سکتا ہے۔

اب یہ دیکھنا آسان ہے کہ جے (ع و) سے نظام لہ ع + مہ و کے دوہرے خطوط ملتے ہیں کیونکہ جب لہ ع + مہ و کامل مربع ہوتا ہے تو

$$\text{لہ}^{2}\,\text{ع}_{11} + 2\,\text{لہ}\,\text{مہ}\,\text{ع}_{12} + \text{مہ}^{2}\,\text{ع}_{22} = 0$$

(160) اور مساوات لہ ع + مہ و = ۰ کے ذریعہ لہ : مہ کو ساقط کرنے سے مساوات

$$\text{ع}_{22}\,\text{ع}^{2} - 2\,\text{ع}_{12}\,\text{ع}\,\text{و} + \text{ع}_{11}\,\text{و}^{2} = 0$$

یعنے ب ج^۲ (ع، و) = ۰

سے دو ہرے خطوط متعین ہوتے ہیں۔

دو دو درجیوں کے نظام کا ہر ہم روچھ شکلوں ع، و، ج (ع، و)

ع، ع، ع کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔ یہ تمام شکلیں مندرجہ

بالا ضابطہ (۱) کے اجزائے ترکیبی ہیں۔ مثلاً ع، و کا حاصل ہے

(ع ع - ع^۲)، (دفعہ ۱۵۰)

اور یہ ب ج (ع، و) کا ممیز بھی ہے اور ع، و، ج (ع، و)

کا بین تحلیلی حاصل اسقاط بھی۔

۱۹۱۔ دو درجی اور کعبی۔ فرض کرو کہ دو کثیر رقمی ہیں

ع ≡ (ا، ب، ج، د) (لا، ما)^۳، و ≡ (اَ، بَ، جَ) (لا، ما)^۲

ع کے ہم متغیر حسب معمول ھ اور گ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اس نظام کا ایک خاص کعبی ہم متغیر ہے یعنے ع اور و کا جیکوبین یا

ج (ع، و) اور ایک خاص دو درجی ہم متغیر یا ب ج (ھ، و)

باقی ہم متغیروں کو لکھ لینے میں حسب ذیل ترقیم کا اختیار کرنا

سہولت بخش ہوگا:۔

ع میں لا، ما کی بجائے تفرقی علامتیں عفما (≡ جف/جف ما)،

- عفلا (≡ - جف/جف لا) علی الترتیب درج کرنے سے جو نتیجہ حاصل

ہوتا ہے اسکو تعبیر کرنیکے لئے ہم ع کے ساتھ لاحقہ عف لگادینگے ہیں

ع_{عف} ≡ (ا، ب، ج، د) (عف_{ما}، عف_{لا})^۳،

و_{عف} ≡ (اَ، بَ، جَ) (عف_{ما}، عف_{لا})^۲

اور ایسی ہی ترقیم دوسری صورتوں میں۔

چار خطی ہم متغیر ہیں جنکو اب اس طرح لکھا جاسکتا ہے:۔

و_{عف} (ع)، و_{عف} (گ_{لا})، ع_{عف} (و^۲)، گ_{عف} (و^۲)،

اِن میں سے پہلے ہم متغیر کو پوری طرح لکھا جائے تو وہ ہے

(ا جَ - ۲ ب بَ + ج اَ) لا + (ب جَ - ۲ ج بَ + د اَ) ما

تین خاص غیر متغیر ہیں۔ پہلا غیر متغیر دو درجیوں ھ_{لا} اور و (161)

کے نظام کا درمیانی غیر متغیر ہے یعنے

ع_{۱۲} ≡ (ا د - ب ج) بَ + (ب د - ج^۲) اَ - (ا ج - ب^۲) جَ

جہاں ترقیم ع_{ف ق} اس بات کو بتانے کے لئے استعمال کیگئی ہے کہ غیر متغیر،

ع کے سروں میں ف ویں درجہ کا اور و کے سروں میں ق ویں درجہ کا ہے۔ دوسرا غیر متغیر کثیر رقمیوں ع اور و کا حاصل اسقاط کا ہے۔ یہ غیر متغیر، ع کے سروں میں دوسرے درجہ کا اور و کے سروں میں تیسرے درجہ کا ہے اور اسکو چودھویں باب کے اسقاط کے طریقوں سے متعدد شکلوں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ اس نمونہ کے کسی غیر متغیر ع_{۳۲} کی عام شکل یہ ہے

ع_{۳۲} ≡ ل ر + م (اَ جَ - بَ^۲) ع_{۱۲}

جہاں ل اور م کوئی عدد ہیں۔

تیسرا غیر متغیر (جو معوج ہے) نمونہ ع^{۳۴} کا ہے اور و$_{عف}$ سے
علی الترتیب تین مرتبہ ۶ اور گ$_{لا}$ کے حاصل ضرب پر عمل کرنے سے
حاصل ہو سکتا ہے۔ چنانچہ اسکو اس شکل

(۶ گ$_{لا}$) و$^{۳}_{عف}$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

بس اس نظام سے متعلق نو خاص شکلیں ہیں اور اگر ان میں ۶ اور و اور ہر ایک کے غیر تابع ہم متغیروں اور غیر متغیروں کو شامل کیا جائے تو ہمیں پندرہ شکلوں کی پوری فہرست ملتی ہے یعنے تین دو درجی، تین کعبی، چار خطی ہم متغیر اور پانچ غیر متغیر۔

۱۹۲ — دو کعبی)۔ فرض کرو کہ کعبی ہیں

۶ ≡ (ا، ب، ج، د) (لا، ما)^{۳}، و ≡ (اَ، بَ، جَ، دَ) (لا، ما)^{۳}

اور ۶ کے ہم متغیر حسب معمول ھ$_{لا}$ اور گ$_{لا}$ سے اور و کے ہم متغیر ھَ$_{لا}$ اور گَ$_{لا}$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اس نظام کا ایک چار درجی ہم متغیر ۶ اور و کا جیکوبین ہے یعنی

ج (۶، و) ≡ (ا بَ) لا^{۴} + ۲ (ا جَ) لا^{۳} ما + {(ا دَ)
+ ۳ (ب جَ)} لا^{۲} ما^{۲} + ۲ (ب دَ) لا ما^{۳} + (ج دَ) ما^{۴}

اور دو خاص کعبی ہم متغیر ہیں یعنے

ج (۶، ھَ$_{لا}$) اور ج (و، ھ$_{لا}$)

(162) چار خاص دو درجی ہم متغیر ہیں۔ اگر ہم لہ ۶ + مہ و کا ہیسی

بنائیں یعنے $ھ_{لا}$ میں ا، ب، وغیرہ کی بجائے لہ ا + مہ اَ، لہ ب + مہ بَ، وغیرہ درج کریں تو

$$لہ^{2} ھ_{لا} + لہ\, مہ\, م_{لا} + مہ^{2} ھَ_{لا}$$

حاصل ہوتا ہے۔ درمیانی بیسوی $م_{لا}$ جو یہاں حاصل ہوا ہے پہلا خاص دو درجی ہم متغیر ہے اور بقیہ تین ہم متغیر $ھ_{لا}$، $م_{لا}$ اور $ھَ_{لا}$ میں سے دو دو کے جیکوبین لینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

چھ خطی ہم متغیر ہیں جنکو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:۔

$ھ_{عف}(و)$، $ھ_{عف}(گَ_{لا})$، $ھَ_{عف}(ع)$، $ھَ_{عف}(گ_{لا})$، $ع_{عف}(ھ_{لا}^{2})$، اور

$$و_{عف}(ھَ_{لا}^{2})$$

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے کہ $ھ_{عف}(ع)$ اور $ھ_{عف}(گَ_{لا})$ متماثلاً معدوم ہوتے ہیں کیونکہ ع اور $گ_{لا}$ کو خطی استحالہ کے ذریعہ علی الترتیب اشکال ا $لا^{3}$ + د $ما^{3}$ اور ا د (ا $لا^{3}$ − د $ما^{3}$) میں اور $ھ_{لا}$ کو شکل ا د لا ما میں لایا جا سکتا ہے۔ (دفعہ ۱۸۰)

اِس نظام کے کل سات غیر متغیر ہیں جنمیں سے پانچ، لہ ع + مہ و کا ممیز بنا کر حاصل کئے جا سکتے ہیں، لہ: مہ کی مختلف قوتوں کے سر غیر متغیر ہیں۔ اگر یہ ممیز

$$لہ^{4} \Delta + ۴ لہ^{3} مہ\, طا + ۶ لہ^{2} مہ^{2} فا + ۴ لہ\, مہ^{3} طَا + مہ^{4} \Delta'$$

ہے تو ہمیں اس طور پر تین خاص غیر متغیر طا، فا، طَا حاصل ہوتے ہیں، ابتدائی اور آخری سر ع اور و کے ممیز ہیں۔ بقیہ دو غیر متغیر

ہر کعبی کے سروں میں طاق رتبوں کے ہیں ۔ انکو ف اور ق سے تعبیر کیا جاتا ہے اور انکی تعریف اس طرح ہو سکتی ہے :۔

ف = ۱/۶ ع_عف (و) = (ا دَ) − ۳ (ب جَ) (۱)

۲۷ ق = ف^۳ − ر (۲)

جہاں ع اور و کا حاصل ر ہے جو بیزو کے طریقہ سے حاصل ہوا ہے (دفعہ ۱۵۵) یعنی

ر = (ا دَ)^۳ − ۱۸ (ا بَ) (ج دَ) (ا دَ) + ۹ (ب دَ) (ج اَ) (ا دَ)

+ ۲۷ (ج اَ)^۲ (ج دَ) + ۲۷ (ا بَ) (ب دَ)^۲ − ۸۱ (ا بَ) (ب جَ) (ج دَ)

اب ر کی یہ قیمت (۲) میں درج کرنے سے

− ق = (ب جَ)^۳ + (ج اَ)^۲ (ج دَ) + (ا بَ) (ب دَ)^۲ − (ب جَ)^۲ (ا دَ)

− ۳ (ا بَ) (ب جَ) (ج دَ) − (ا دَ) (ا بَ) (ج دَ)

کوئی غیر متغیر جو ضابطہ ل ف^۳ + م ر میں شامل ہو (جہاں ل اور م اعداد ہیں) نمونہ ع^۳ کا ہونے کی وجہ سے ق کی بجائے اس نمونہ کے بنیادی غیر متغیر کے طور پر انتخاب کیا جا سکتا تھا لیکن اس کو منتخب کرنیکے اسباب آئندہ ظاہر ہو جائینگے (دیکھو مثال ۴ صفحہ ۲۶۴) ۔ (168)

تخمین کردہ خاص شکلوں کے ساتھ وہ اشکال بھی اگر شمار کیجائیں جو ہر کعبی سے متعلق ہیں تو کل چھبیس بنیادی شکلیں ملتی ہیں یعنے ایک چار درجی، چھ کعبی، چھ دو درجی، چھ خطی ہم متغیر اور سات غیر متغیر۔

دفعات ماسبق میں تخمین کردہ ہم متغیروں اور غیر متغیروں میں سے بعض، امثلہ ذیل میں مجتمع نظام کی دونوں مساواتوں کی اصلوں کی رقوم میں بیان ہوتے ہیں۔

۱۹۳ - اجتماعئے - ایک ہی درجہ کی مجتمع شکلوں سے

ہم متغیروں اور غیر متغیروں کا ایک سلسلہ پیدا ہوتا ہے جنکے سرِ شکل (ا، ب، س) کے مقطعوں سے بیان ہو سکتے ہیں، یہ مقطعات ایسے ہیں جیسے اُس حاصلِ اسقاط میں واقع ہوتے ہیں جو بیزو کے طریقہ سے حاصل کیا جاتا ہے (دفعہ ۱۵۵) - یہ ہم رو نہیں بدلتے جبکہ ع، و کو لہ ع + مہ و، لَہ ع + مَہ و میں تبدیل کیا جاتا ہے، صرف ایک جزو ضربی بدلتا ہے جو شکل (لہ مَہ - لَہ مہ) کا ہوتا ہے۔ اس قسم کے غیر متغیروں کو ہم اجتماعئے کہینگے - متناظر ہم متغیروں کو اسی طرح اجتماعی ہم متغیر کہا جا سکتا ہے - قبل الذکر کی مثالیں دفعہ ۱۹۲ کے ف اور ق ہیں اور ایسی شکلوں کے جنکو بین ثانی الذکر جماعت کے ہم رکُن کی مثالیں ہیں -

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ دفعہ سابق میں لہ : مہ میں جو چار درجی ہے یعنی جو لہ ع + مہ و کا ممیز ہے اُسکے غیر متغیر ع اور ج، دو کعبیوں کے نظام کے اجتماعئے ہیں - کیونکہ لہ اور مہ کا خطی استحالہ در اصل ع اور و کے اُس قسم کے استحالہ کے معادل ہے جو اس دفعہ میں زیر بحث رہا ہے اور اس لئے غیر متغیروں ۵، طا، فا وغیرہ کا کوئی تفاعل جو اس قسم کے استحالہ سے نہیں بدلتا اجتماعیہ ہونا چاہئے - اس کی تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ غیر متغیر، ف اور ق کی رقوم میں حسب ذیل طریقہ پر بیان ہو سکتے ہیں (دیکھو سامن کا ہائر الجبرا دفعہ ۲۱۸):-

$$ع = ۳ف(ف^۳ - ۲۴ ق)،$$

$$ج = - ف^۶ + ۳۶ ف^۳ ق - ۲۱۶ ق^۲$$

(164)

مثالیں

۱۔ اگر مساواتوں

ع ≡ ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د = ۰، و ≡ اَ لا^{۲} + ۲ بَ لا + جَ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، اور عہَ، بہَ، ہوں تو تفاعل

(بہ ـ جہ)^{۲} (عہ ـ عہَ) (عہ ـ بہَ) + (جہ ـ عہ)^{۲} (بہ ـ عہَ) (بہ ـ بہَ)

+ (عہ ـ بہ)^{۲} (جہ ـ عہَ) (جہ ـ بہَ)

کو سروں کی رقوم میں بیان کرو۔

اس تفاعل کو فہ سے تعبیر کرو تو آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے

ا^{۲} اَ فہ = ۹ {اَ^{۲} (ب د ـ ج^{۲}) ـ بَ (ا د ـ ب ج) + جَ (ا ج ـ ب^{۲})}۔

اصلوں کا دیا ہوا تفاعل نظام کا ایک غیر متغیر ہے کیونکہ اس میں کعبی کی سب اصلیں دوسرے درجہ میں اور دو درجی کی سب اصلیں پہلے درجہ میں شامل ہوتی ہیں۔ اگر ہم دفعہ ۱۶۶ کے ابدالات عمل میں لائیں اور تفاعل کو صحیح بنانے کے لئے ع^{۲} و سے ضرب دیں تو نتیجہ میں لا داخل نہیں ہوگا اور اس لئے وہ ایک غیر متغیر ہے (دفعہ ۱۹۱)۔ مساوات فہ = ۰ کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ دو درجی و کو ع کے حیسوی کے ساتھ ملکر ایک موسیقی نظام بنانا چاہئے۔

۲۔ پہلی مثال کی ترقیم استعمال کر کے وہ شرط معلوم کرو کہ ع = ۰ کی اصلیں و = ۰ کی اصلوں کے ساتھ ایک موسیقی سعت بنائیں۔

جواب:۔ ر + ۹ (اَ جَ ـ بَ^{۲}) ع$_{۱۲}$ = ۰

۳۔ اگر کعبیوں

ع ≡ ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د = ۰،

و ≡ اَ لا^{۳} + ۳ بَ لا^{۲} + ۳ جَ لا + دَ = ۰،

کی اصلیں عہ، بہ، جہ اور عہَ، بہَ، جہَ ہوں تو حسب ذیل تفاعل کو (جب اسکو ا اَ سے ضرب دیا جائے) سروں کی رقوم میں بیان کرو اور ثابت کرو کہ وہ اس نظام کا ایک غیر متغیر ہے :-

(عہ - عہَ) (بہ - بہَ) (جہ - جہَ) + (عہ - بہَ) (بہ - جہَ) (جہ - عہَ)

+ (عہ - جہَ) (بہ - عہَ) (جہ - بہَ)

یا، دوسری طرح ترتیب دیکر لکھیں تو

(عہ - عہَ) (بہ - جہَ) (جہ - بہَ) + (عہ - بہَ) (بہ - عہَ) (جہ - جہَ)

+ (عہ - جہَ) (بہ - بہَ) (جہ - عہَ)

جواب:- ۳ف جہاں ف = (ا دَ - اَ د) - ۳ (ب جَ - بَ ج) (دفعہ ۱۹۲)

۴- پہلی مثال کی ترقیم کو قائم رکھکر ثابت کرو کہ اگر ک معلوم ہو سکے ایسا کہ ع + ک و ایک کامل مکعب ہو جائے تو دونوں کعبیوں کی اصلوں کے درمیان حسب ذیل ربط موجود ہوتا ہے :-

(بہ - جہ) ∛فہ (عہ) + (جہ - عہ) ∛فہ (بہ) + (عہ - بہ) ∛فہ (جہ) = ۰

جہاں فہ (لا) = و اور عہ، بہ، جہ مساوات ع = ۰ کی اصلیں ہیں۔ ثابت کرو کہ اس صورت میں غیر متغیر ق (دفعہ ۱۹۲) معدوم ہوتا ہے۔

اصلوں کے درمیان مندرجۂ بالا ربط فوراً حاصل ہو جاتا ہے اگر متماثل ع + ک و = (ل لا + م)³ میں لا کی بجائے عہ، بہ، جہ درج کیا جائے اور محصلہ مساواتوں سے ک، ل، م کو ساقط کیا جائے۔

منطق بنانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے (165)

{ [(بہ - جہ)³ فہ (عہ) + (جہ - عہ)³ فہ (بہ) + (عہ - بہ)³ فہ (جہ)] / [(بہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - بہ)] }³ - ۲۷ فہ (عہ) فہ (بہ) فہ (جہ) = ۰

فہ (عہ)، فہ (بہ)، فہ (جہ) کی بجائے اندراجات کرو اور روابط داخل کرو

جو تماثلہ

$$\Sigma\,(\text{عہ}+\text{لہ})^{3}(\text{بہ}-\text{جہ})^{3}\equiv 3(\text{عہ}+\text{لہ})(\text{بہ}+\text{لہ})(\text{جہ}+\text{لہ})(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{عہ}-\text{بہ})$$

میں لہ کی مختلف قوتوں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتے ہیں، پھر نتیجہ کو کسروں کی رقوم میں بیان کرو تو

$$\{3\,\text{ف}\}^{3}-27\,\text{ک}^{2}=0،\ \text{یا}\ \text{ق}=0 \qquad (\text{دفعہ } 192)$$

اب ہم وہ متعدد مختلف شکلیں دیتے ہیں جنہیں غیر متغیر ق بیان ہو سکتا ہے۔ چونکہ ع + ک و ایک کامل مکعب ہے اسلئے (دفعہ ۴۳)

$$\frac{\text{ا}+\text{ک}\,\text{اَ}}{\text{ب}+\text{ک}\,\text{بَ}}=\frac{\text{ب}+\text{ک}\,\text{بَ}}{\text{ج}+\text{ک}\,\text{جَ}}=\frac{\text{ج}+\text{ک}\,\text{جَ}}{\text{د}+\text{ک}\,\text{دَ}} \qquad (1)$$

ان کسروں کو علٰحدہ علٰحدہ کَ کے مساوی رکھنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ

$$\left.\begin{aligned}\text{ا}+\text{ک}\,\text{اَ}+\text{کَ}\,\text{ب}+\text{ک}\,\text{کَ}\,\text{بَ}&=0،\\ \text{ب}+\text{ک}\,\text{بَ}+\text{کَ}\,\text{ج}+\text{ک}\,\text{کَ}\,\text{جَ}&=0،\\ \text{ج}+\text{ک}\,\text{جَ}+\text{کَ}\,\text{دَ}+\text{ک}\,\text{کَ}\,\text{دَ}&=0،\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

اور کَ، ک کَ کے لئے اِن مساواتوں کو حل کرنے سے ہم ک، کَ، ک کَ کو ساقط کر سکتے ہیں اور شرط کو شکل ذیل میں حاصل کرتے ہیں:-

$$\text{ق}\equiv\begin{vmatrix}\text{ا}&\text{ب}&\text{ج}\\ \text{اَ}&\text{بَ}&\text{جَ}\\ \text{بَ}&\text{جَ}&\text{دَ}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\text{بَ}&\text{جَ}&\text{دَ}\\ \text{ا}&\text{ب}&\text{ج}\\ \text{ب}&\text{ج}&\text{د}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\text{اَ}&\text{بَ}&\text{جَ}\\ \text{ا}&\text{ب}&\text{ج}\\ \text{ب}&\text{ج}&\text{د}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\text{ب}&\text{ج}&\text{د}\\ \text{اَ}&\text{بَ}&\text{جَ}\\ \text{بَ}&\text{جَ}&\text{دَ}\end{vmatrix}=0$$

پھر مساواتوں (۱) سے ک اور ک^۲ ساقط کرنے سے ق کیلئے ایک دوسری شکل ملتی ہے یعنے

$$\text{ق}\equiv\begin{vmatrix}\text{ا}\,\text{ج}-\text{ب}^{2}&\text{ا}\,\text{جَ}+\text{اَ}\,\text{ج}-2\,\text{ب}\,\text{بَ}&\text{اَ}\,\text{جَ}-\text{بَ}^{2}\\ \text{ا}\,\text{د}-\text{ب}\,\text{ج}&\text{ا}\,\text{دَ}+\text{اَ}\,\text{د}-\text{ب}\,\text{جَ}-\text{بَ}\,\text{ج}&\text{اَ}\,\text{دَ}-\text{بَ}\,\text{جَ}\\ \text{ب}\,\text{د}-\text{ج}^{2}&\text{ب}\,\text{دَ}+\text{بَ}\,\text{د}-2\,\text{ج}\,\text{جَ}&\text{بَ}\,\text{دَ}-\text{جَ}^{2}\end{vmatrix}$$

ق کی یہ شکل اس شرط کو بیان کرنے سے بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے کہ

لہ ع + مہ و (دفعہ ۱۹۲) کا مبسوی تمائزلاً معدوم ہونا چاہئے کیونکہ یہ شرط پوری ہوتی ہے جبکہ لہ ع + مہ و ایک کامل مکعب ہو۔

آخرالامر، مساوات (۲) کو اس شکل

$$\frac{\text{ا + کَ ب}}{\text{اَ + کَ بَ}} = \frac{\text{ب + کَ ج}}{\text{بَ + کَ جَ}} = \frac{\text{ج + کَ د}}{\text{جَ + کَ دَ}}$$

میں لکھنے اور کَ، کَ^{2} کو ساقط کرنے سے ق کے لئے ایک تیسری شکل ملتی ہے یعنی

ق ≡

(ا بَ)	(ا جَ)	(ب جَ)
(ا جَ)	(ا دَ)+(ب جَ)	(ب دَ)
(ب جَ)	(ب دَ)	(ج دَ)

اس شکل میں اجزائے ترکیبی وہی صغیر مقطعات ہیں جو بیزو کے (166)
طریقہ سے حاصل استقاط معلوم کرنے میں واقع ہوتے ہیں، اور اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ ق کی یہ قیمت دفعہ ۱۹۲ میں درج کردہ پھیلائی ہوئی شکل کے مطابق ہے۔

۵ ـ وہ شرط معلوم کرو کہ دو کعبیوں کی اصلوں سے ایک درپیچی نظام متعین ہو۔

نمونہ

ا	عہ + عہَ	عہ عہَ
ا	بہ + بہَ	بہ بہَ
ا	جہ + جہَ	جہ جہَ

کے چھہ مقطعات کے حاصل ضرب کو صفر کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ شرط اصلوں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔

۶ ـ مثال ماسبق کی شرط کو کعبیوں کے سروں کی رقوم میں بیان کرو۔

چونکہ ایک کعبی کی اصلیں دوسرے کعبی کی اصلوں کی مزدوج ہیں یہ دونوں کعبی اشکال ذیل میں تحویل ہو سکتے ہیں :۔